



آموزش ریاضیات گسسته

رشته مهندسی کامپیوتر

دانشکده هوش مصنوعی

مدرس : مبینا غلامی

Kenneth H. Rosen



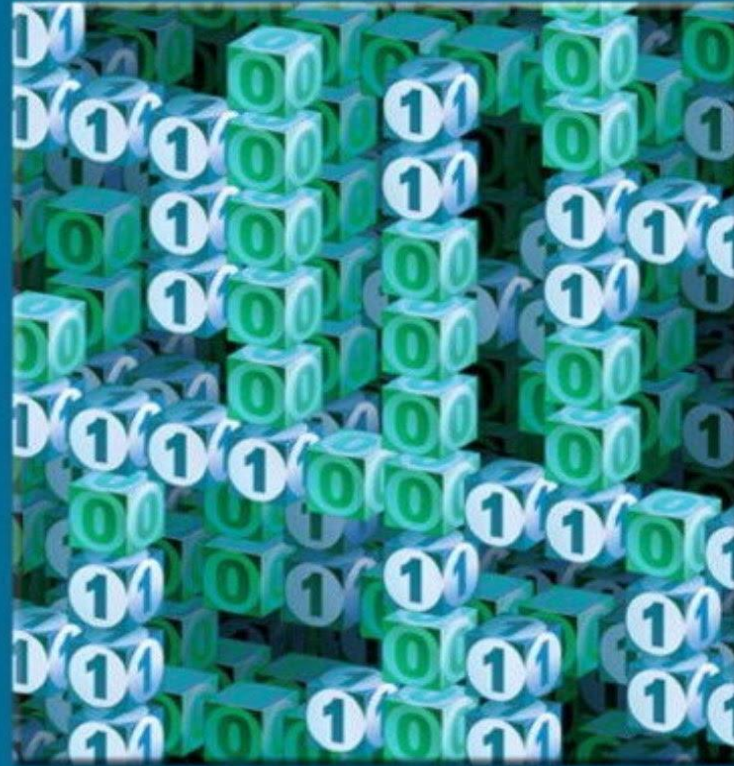
Discrete Mathematics and Its Applications

Mc
Graw
Hill
Education

Eighth Edition

DISCRETE and COMBINATORIAL MATHEMATICS

An Applied Introduction



Ralph P. Grimaldi

Fifth Edition

منابع:

فهرست:

فصل اول: حساب گزاره ها

فصل دوم: استلزام منطقی

فصل سوم: سورها

فصل چهارم: مجموعه ها

فصل پنجم: رابطه-تابع

فصل ششم: روابط و کلاس هم ارزی

فصل هفتم: ترتیب جزئی، شبکه، جبر بول

فصل هشتم: ساختارهای جبری

فصل نهم: شمارش

فصل دهم: روابط بازگشتی

فصل یازدهم: گراف

فصل دوازدهم: درخت

ریاضیات گسسته

شاخه‌ای از ریاضیات که به مطالعه اعداد شمارشی و اشیای گسسته می‌پردازد، ساختمان گسسته (ریاضیات گسسته) نام دارد.

ریاضیات گسسته به دلیل کاربردهای فراوان در حوزه‌های مختلف، یکی از مهم‌ترین و جذاب‌ترین دروس ریاضیات است. این درس را می‌توان ریاضیات تخصصی رشته کامپیوتر نامید و مباحث مهمی مانند منطق ریاضی که مبنای همه استدلال‌های ریاضی محسوب می‌شود و یا مبحث نظریه گراف که در بسیاری از علوم کامپیوتر کاربرد دارد، در این درس آموزش داده می‌شود.

هدف از یادگیری گسسته، تسلط به استدلال ریاضی و روش‌های استفاده از برهان در حل مسائل، استفاده از روش‌های ترکیبات و به کارگیری گراف و درخت در حل مسائل مربوط به رشته کامپیوتر است تا دانشجویان مقطع کارشناسی رشته کامپیوتر بتوانند به دروس خود تسلط کافی پیدا کنند.

تعریف :

در یک استدلال هر یک از عبارات استفاده شده برای رسیدن به نتیجه را فرض و عبارت آخر را نتیجه یا تالی می نامیم.

یک استدلال زمانی معتبر است که اگر فرض های آن درست باشد نتیجه نیز درست است. .
جملات یا راست هستند یا دروغ ولی هرگز نمیتوانند هم راست باشند هم دروغ، چنین جملاتی را گزاره می نامیم.

گزاره : یک جمله ی خبری است که یا راست است یا دروغ ولی نه هر دو.

قضیه : گزاره ای که راست بودن آن را در یک سیستم ریاضی بتوان ثابت کرد.

جهت نمایش گزاره از حروف کوچک لاتین مانند p یا q یا r استفاده می شود و برای نمایش ارزش درست گزاره از $T(\text{True})$ یا عدد ۱ و جهت نمایش ارزش نادرست از عدد صفر $F(\text{False})$ استفاده می شود.

گزاره:

یک جمله خبری است که می تواند درست یا نادرست می باشد.

• مثلاً: همدان اولین پایتخت ایران است.

• $3+5=9$

عبارات زیر گزاره نمیباشد:

خرگوش ها حیوانات باهوشی هستند. (باهوش بودن یک صفت نسبی است.)

مقدار x از y کوچکتر است. (مشخص نیست به ازای چه مقادیری از x و y ، این ادعا درست است.)

$x+2=5$ گزاره نیست ، ولی اگر برای آن بازه عددی تعیین گردد گزاره است.

انواع گزاره

گزاره ساده :

گزاره ای که قابل تقسیم به گزاره های ساده تر نیست.

گزاره مرکب:

گزاره ای که از گزاره های ساده تر تشکیل شده است.

گزاره نما:

اگر گزاره ای شامل متغیر باشد و به ازای بعضی مقادیر متغیر، ارزش گزاره T و برخی مقادیر دیگر F شود، آن را گزاره نما می نامند.

مثلا برای نمایش گزاره نمای X عددی اول است از $P(x)$ یا $q(x)$ یا $r(x)$ استفاده می شود. جدول درستی: در فرمول های گزاره ای با جایگزینی مقادیر T و f به جای هریک از مولفه ها، یک نمونه از فرمول استخراج می شود. روشی برای تحلیل درستی فرمول های گزاره ای به ازای کلیه حالت های مولفه های آن می باشد.

تعداد ردیف های این جدول با تعداد گزاره های پایه مرتبط است. اگر یک گزاره مدنظر باشد این یک گزاره تنها دارای حالت درست T یا نادرست F میباشد از این رو جدول دو ردیف خواهد داشت.

پس: برای N گزاره ، 2^N به توان N ردیف در جدول وجود دارد.

عملگرهای منطقی

$\sim$	$!$	$\neg$	نقیض (NOT)
	$\wedge$		عطف (AND)
	$\vee$		فصل (OR)
	$\uparrow$		NAND
	$\downarrow$		NOR
	<u>$\vee$</u>		XOR

عملگر نقیض NOT یا نفی یک گزاره

نقیض گزاره P که با علامت $\sim P$ نشان داده می شود، گزاره ای است که ارزش آن مخالف ارزش گزاره P است. نقیض گزاره به این صورت بیان می شود که : **چنین نیست که P** .
مثال: نقیض گزاره p را بیابید که در آن:

P : متغیر X به توان 12 یک نام متغیر معتبر در زبان C است.

جواب: چنین نیست که متغیر X به توان 12 یک نام متغیر معتبر در زبان C است. یا به عبارت دیگر متغیر X به توان 12 یک نام متغیر معتبر در زبان C نیست.

عملگر نقیض یا NOT

جدول درستی نقیض گزاره

P	$\sim P$
T	F
F	T

ترکیب عطفی AND

اگر P و q دو گزاره باشند، ترکیب عطفی دو گزاره با $p \wedge q$ نشان داده می شود. ارزش گزاره ی مرکب حاصل از ترکیب عطفی دو گزاره زمانی درست است که هر دو گزاره دارای ارزش درست باشند، در غیر این صورت ارزش گزاره مرکب $p \wedge q$ نادرست خواهد بود.

ترکیب عطفی با نماد AND و . هم نمایش داده می شود.

ترکیب فصلی دو گزاره OR

اگر P و q دو گزاره باشند، ترکیب فصلی دو گزاره با $p \vee q$ نشان داده می شود. ارزش گزاره مرکب حاصل از ترکیب فصلی دو گزاره زمانی نادرست است که هر دو گزاره توما دارای ارزش نادرست باشند، در غیر این صورت ارزش گزاره مرکب درست خواهد بود. ترکیب فصلی با نماد OR یا + نشان داده می شود.

AND

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

(Conjunction)

عملگر OR

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

(Disjunction)

ترکیب NAND

اگر P و q دو گزاره باشند، ترکیب NAND دو گزاره را با $P \uparrow q$ نشان داده می شود. این ترکیب در حقیقت نقض عطفی یک گزاره است.

ترکیب NOR

اگر P و q دو گزاره باشند، ترکیب NOR دو گزاره را با $P \downarrow q$ نشان داده می شود. این ترکیب در حقیقت ترکیب نقیض فصلی یک گزاره است.

NAND

عملگر های NOR

NOT AND

p	q	$p \uparrow q$	$\wedge$
T	T	F	T
T	F	T	F
F	T	T	F
F	F	T	F

NOT OR

p	q	$p \downarrow q$	$\vee$
T	T	F	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	T	F

عملگر XOR

?

اگر P و q دو گزاره باشند، ترکیب XOR دو گزاره با q نشان داده می شود. به این ترکیب XOR اختصاصی هم گفته می شود. ارزش این ترکیب وقتی درست است که از بین دو گزاره، منحصر ا یکی ارزش درست داشته باشد. بنابراین اگر P و q توامان درست یا توامان نادرست باشد، ارزش $P \oplus q$ نادرست خواهد بود.

عملگر XOR

$\vee$

$\oplus$

p	q	$p \vee q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ترکیب شرطی

اگر P و q دو گزاره باشند، ترکیب شرطی دو گزاره را با $p \rightarrow q$ نشان داده می شود. ارزش این گزاره زمانی نادرست است که p درست و q نادرست باشد. در مابقی موارد این ترکیب ارزش درست خواهد داشت. در این گزاره p را مقدم و q را تالی می نامند.

و گفته می شود: اگر p آنگاه q یا p شرط کافی برای q است یا q شرط لازم برای p است

عملگر شرطی

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

$$\overset{\text{مقدم}}{p} \rightarrow \overset{\text{نتی}}{q}$$

اگر p آنگاه q

p شرط کفایت برای q

q شرط لازم است برای p

عملگر دو شرطی

اگر P و q دو گزاره باشند، ترکیب دو شرطی دو گزاره را با $q \leftrightarrow p$ نشان داده می شود. اگر دو گزاره p و q توانان ارزش درست یا توانان ارزش نادرست داشته باشند، گزاره $q \leftrightarrow p$ دو شرطی دارای ارزش درست خواهد بود.

گزاره دو شرطی به صورت p : اگر و فقط اگر q یا p شرط لازم و کافی است برای q است بیان می شود.

عملگر دو شرطی

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	<u>T</u>
T	F	F
F	T	F
F	F	<u>T</u>

$$p \leftrightarrow q$$

p اگر و فقط اگر q

p شرط لازم و کافی است برای q

تعاریف گزاره ها:

تعریف: در یک استدلال هر یک از عبارات استفاده شده برای رسیدن به نتیجه را فرض یا مقدم و عبارت آخر را نتیجه یا تالس می‌نامیم.

* یک استدلال زمانی معتبر است که اگر فرضهای آن درست باشد نتیجه درست است.

* جملات یا راست هستند یا دروغ ولی هرگز نمی‌توانند هم درست باشند هم دروغ. چنین جملاتی را گزاره می‌نامیم.

گزاره: یک جمله خبری است که یا راست است یا دروغ ولی نه هر دو.

قضیه: گزاره‌ای که راست بودن آن را در یک سیستم ریاضی بتوان ثابت کرد.

تشکیل گزاره‌های جدید از روی گزاره‌های قبلی (حروف پیوندی مبنا):

- حرف پیوندی «و»، «عطف»، « $\wedge$ »: زمانی راست است که هر دو راست باشد.

- حروف پیوندی «یا»، «فصل»، « $\vee$ »: زمانی راست است که یکی از گزاره‌ها راست باشد.

- نقیض «~»، یا نفی یک گزاره‌ها: ارزش گزاره اول را نفی می‌کند.

- **جدول درستی:** روشی برای تجزیه و تحلیل ارزشهای گزاره‌ها

نکته: در نوشتن جدول درستی اگر گزاره‌ای مبنا داشته باشیم 2^n ترکیب داریم.

مراحل ارزیابی:

۱- داخلی ترین پرائتز

۲- عمل

۳- عمل $\wedge$ و $\vee$

گزاره راستگو: ارزش درستی گزاره‌های مبنای تشکیل دهنده آنها همواره راست باشد.

نکته: دو گزاره را به طور منطقی هم ارز گوییم اگر به ازای هر ترکیب همسان از ارزش گزاره‌های مبنای تشکیل دهنده آنها مقادیر

درستی داشته باشد. (با گزاره های هم‌ارز می‌توان گزاره‌های پیچیده را با گزاره‌های ساده جایگزین کرد) $p = q$

گزاره‌های شرطی ($p \rightarrow q$): گزاره‌ی p را مقدم و q را تالی می‌نامیم و این گزاره زمانی نادرست است که مقدم درست ولی تالی

نادرست باشد.

قضیه: $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q \equiv \sim q \rightarrow \sim p (p \wedge \sim q)$

تعاریف شرطی:

اگر p آنگاه q

q اگر p

p اگر q

p شرط کافی برای q است.

q شرط لازم برای p است.

تعریف: اگر $p \rightarrow q$ گزاره‌ی شرطی باشد، گزاره‌ی $\sim p \rightarrow \sim q$ را عکس نقیض، $q \rightarrow p$ را عکس و $\sim q \rightarrow \sim p$ را وارون آن گزاره می‌نامند.

خواص گزاره‌ها:

جابه‌جایی $q \vee p \equiv p \vee q$, $q \wedge p \equiv p \wedge q$

شرکت‌پذیری $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$, $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

قانون دمورگان: $(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$; $\dots$; $\sim p \wedge \sim q \equiv \sim (p \vee q)$

خودتوانی: $p \equiv p \vee p$; $p \equiv p \wedge p$

پخش‌پذیری: $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \equiv p \wedge (q \vee r)$; $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \equiv p \vee (q \wedge r)$

همانی: $T \equiv p \vee T$, $p \equiv p \vee F$, $P \equiv P \wedge T$, $F \equiv P \wedge F$

متمم: $T \equiv P \vee \sim P$, $F \equiv P \wedge \sim P$

نقیض دوگانه: $\sim \sim p \equiv p$

جذبی: $p \equiv p \vee (p \wedge q)$

گزاره دوشروطی ($p \leftrightarrow q$): اگر ارزش دو گزاره متشکل دهنده آن یکسان باشد آنگاه ارزش آن درست است و بدین صورت بیان می‌شود: p اگر و تنها اگر q

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$\sim p \vee \sim q \equiv \sim (p \wedge q)$$

روشهای اثبات:

q از $p_1, \dots, p_r, \dots, p_n$ نتیجه می‌شود $\rightarrow$ یک راستگو باشد $(p_1 \wedge p_r \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$ نماد $\vdash$ (بنابراین):

$$p_1, p_r, p_r, \dots, p_n \vdash q$$

* در گزاره فوق p_1 مقدم‌ها و مفروضات گزاره و q نتیجه می‌باشد.

* مجموعه‌ی فوق در کل یک استنتاج می‌باشد.

چند قاعده مهم استنتاج:

$$p \vdash p \vee q \text{ قیاس فصلی:}$$

$$p \wedge q \vdash p \text{ قیاس تخصیصی:}$$

$$p, q \vdash p \wedge q \text{ قیاس عطفی:}$$

$$p; p \rightarrow q \vdash q \text{ قیاس استنتاجی:}$$

$$p \rightarrow q; q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r \text{ قیاس تعدی:}$$

$$p \rightarrow q; \sim q \vdash \sim p \text{ قیاس عکس:}$$

استدلال غلط؛ استدلالی است که برای بعضی از حالات‌های مقدم‌های آن راست ولی تالی آن دروغ می‌باشد.

اثبات غیرمستقیم:

یک استلزام منطقی با عکس نقیض آن هم‌ارز است.

$$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$$

بنابراین گزاره‌ی فوق راستگو می‌باشد. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

به جای آن که ثابت کنیم $p \rightarrow q$ به طور مستقیم درست می‌باشد، فرض می‌کنیم که q دروغ است و نشان می‌دهیم که در صورت اخیر p نیز دروغ است.

اثبات به وسیله‌ی برهان خلف:

این روش بر پایه‌ی راستگوی و یا قیاس بنا شده است.

$$[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$$

$$p \rightarrow q, \sim q \vdash \sim p$$

در نتیجه اگر گزاره‌ی p به گزاره‌ی دروغ q منجر شود آنگاه خود p باید دروغ باشد.

تناقض: گزاره‌ای که ارزش آن صرف‌نظر از مقادیر متغیرهای ظاهر شده در آن همواره دروغ است.

نکته: در نتیجه هر گزاره‌ای که به یک تناقض منجر شود دروغ می‌باشد.

نکته: اگر همه‌ی p_i ها راست و $\sim q$ دروغ باشد در نتیجه p راست است. (برهان خلف)

گزاره‌نما: عبارتی است که اگر مقادیر متغیرهای به کار رفته در آن مشخص شود به گزاره تبدیل شود.

منطق: به مجموعه قواعدی که به کمک آنها بتوان اعتبار یک استدلال را مشخص نمود «منطق» گفته می‌شود. در منطق صحبت از مطالبی است که درست (True) و یا نادرست (False) می‌باشند. در جبر عادی، متغیرها روی دامنه‌ای از اعداد تعریف می‌شوند ولی در منطق، متغیرها دامنه‌شان مجموعه $\{F, T\}$ می‌باشد که مخفف کلمات True و False هستند.

گزاره: جمله‌ای خبری که بتوان به آن ارزش درست یا نادرست داد گزاره نامیده می‌شود. گزاره‌ها معمولاً با حروف بزرگ انگلیسی بجز F, T نشان داده می‌شوند و به آنها «گزاره نما» (متغیر گزاره‌ای) گفته می‌شود.

جبر گزاره‌ها

گزاره ساده: گزاره‌ای که قابل تجزیه به گزاره‌های کوچکتر نبوده و خود مستقلاً دارای ارزش T یا F باشد.

گزاره مرکب: از دو یا چند گزاره ساده تشکیل می‌شود که با «رابطه‌های منطقی» با هم ترکیب شده‌اند.

رابط منطقی (لفظ پیوند دهنده): مجموعه‌ای از عملگرها می‌باشند که برخی بر روی یک گزاره عمل می‌کنند و بعضی بین دو یا چند گزاره واقع شده و بسته به T یا F بودن هر گزاره، حاصل T یا F را برای ترکیب بدست آمده، تعیین می‌نمایند.

عمده این روابط به شرح زیر می‌باشند:

- ۱- **نقیض** ($\neg$ - NOT): این رابط بر روی یک گزاره عمل می‌کند و ارزش آن را معکوس می‌نماید.
- ۲- **ترکیب عطفی** ($\wedge$ - AND): بر روی دو یا چند گزاره عمل می‌کند و تنها در صورتی حاصل ارزش T خواهد داشت که همه گزاره‌ها ارزش T داشته باشند.
- ۳- **ترکیب فصلی** ($\vee$ - OR): به روی دو یا چند گزاره عمل می‌کند و تنها در صورتی حاصل F می‌باشد که گزاره سمت چپ (مقدم)، F و گزاره سمت راست (تالی)، F باشد.
- ۵- **ترکیب دو شرطی** ($\leftrightarrow$): بر روی دو گزاره عمل می‌کند و حاصل تنها در صورتی ارزش T دارد که دو گزاره ارزش یکسان (T یا F) داشته باشند.

جدول. نقيض

P	$\neg P$
T	F
F	T

جدول. ترکیب عطفی

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

جدول. ترکیب فصلی

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

جدول. ترکیب شرطی

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

جدول. ترکیب دو شرطی.

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

جبر گزاره‌ها: عبارت است از مجموعه گزاره‌ها، رابطهای منطقی و قوانینی که در مورد آنها صدق می‌کند.

جدول درستی (Truth-)

جدولی است که در آن براساس ترکیب‌های مختلف و ممکن گزاره‌های ساده، ارزش گزاره‌ای مرکب از گزاره‌های ساده و رابطهای

منطقی تعیین می‌گردد. جدول زیر نمونه‌ای از جدول درستی یک گزاره مرکب می‌باشد.

جدول. جدول درستی گزاره مرکب $(P \vee Q) \vee \neg P$

P	Q	$P \vee Q$	$\neg P$	$(P \vee Q) \vee \neg P$
T	T	T	F	T
T	F	T	F	T
F	T	T	T	T
F	F	F	T	T

اولویت (تقدم) رابطها

اولویت رابطها در یک گزاره مرکب به ترتیب زیر است:

۱- $\neg$ (نقیض)

۲- $\wedge$ (ترکیب عطفی)

۳- $\vee$ (ترکیب فصلی)

۴- $\rightarrow$ (ترکیب شرطی)

۵- $\leftrightarrow$ (ترکیب دوشروطی)

در صورت وجود پرانتز در گزاره مرکب، داخلی‌ترین پرانتز دارای بالاترین اولویت است و نیز بین رابطهای هم اولویت سمت چپ‌ترین رابط در گزاره مرکب دارای اولویت بالاتر است.

فرمول‌های خوش ساخت (Well – Formed)

یک فرمول خوش ساخت (wff) با استفاده از قوانین زیر تعیین می‌گردد:

الف) یک گزاره نما (متغیر گزاره‌ای) به تنهایی یک wff می‌باشد.

ب) اگر A یک wff باشد، $\neg A$ نیز یک wff خواهد بود.

گزاره همیشه درست (Tautology)

یک گزاره مرکب که ارزش آن مستقل از ارزش گزاره‌های ساده تشکیل دهنده، همواره درست باشد یک «گزاره همیشه درست» (تاتالوژی) گفته می‌شود. جدول نمونه‌ای از جدول درستی یک گزاره همیشه درست را نشان می‌دهد.

قضیه: اگر A و B دو گزاره همیشه درست باشند، $A \wedge B$ نیز یک گزاره همیشه درست است.

قضیه: در یک گزاره همیشه درست، اگر به جای یکی از گزاره‌های ساده یک گزاره دیگر (اعم از ساده یا مرکب) جایگزین شود گزاره بدست آمده کماکان یک گزاره همیشه درست خواهد بود.

بعنوان نمونه در گزاره مرکب همیشه درست $P \vee Q \leftrightarrow Q \vee P$ اگر به جای گزاره ساده P ، گزاره $R \rightarrow S$ جایگزین شود، گزاره

حاصل یعنی $(R \rightarrow S) \vee Q \leftrightarrow Q \vee (R \rightarrow S)$

نیز یک گزاره همیشه درست است.

نکته: عمل جایگزینی را می‌توان برای بیش از یک متغیر نیز انجام داد مشروط به اینکه جایگزینی بصورت همزمان صورت گیرد.

در مقابل یک گزاره همیشه راست، گزاره همیشه نادرست (Contradiction) نیز وجود دارد.

هم ارزی

دو گزاره هم ارز: دو گزاره A و B هم ارز نامیده می‌شوند، اگر به ازای کلیه حالات ارزشی ممکن گزاره‌های ساده تشکیل دهنده آنها، ارزش یکسان داشته باشند (ستون آخر جدول درستی آنها یکسان باشد). هم ارز بودن دو گزاره A و B بصورت $A \Leftrightarrow B$ نمایش داده می‌شود.

یکسان بودن ارزش A و B باعث می‌شود که ترکیب دو شرطی $A \leftrightarrow B$ همواره درست باشد، پس می‌توان گفت A و B زمانی هم ارز می‌باشند که $A \leftrightarrow B$ یک گزاره همیشه درست باشد.

قضیه: اگر $A \Leftrightarrow B$ و $B \Leftrightarrow C$ باشند آنگاه $A \Leftrightarrow C$ خواهد بود.

نکته: اگر گزاره‌های A و B هم ارز باشند، می‌توان در گزاره مرکبی مانند P ، بجای یک یا چند بار تکرار A و یا B ، معادل هر یک را قرار داد. جدول زیر گزاره‌های مرکب هم ارز مهم را نشان می‌دهد:

جدول. گزاره‌های هم ارز مهم

گروه دو	گروه یک	توضیح
$P \vee P \Leftrightarrow P$ $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$ $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ $P \vee F \Leftrightarrow P$ $P \vee T \Leftrightarrow T$ $\neg P \vee P \Leftrightarrow T$ $P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$ $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge Q$ $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \rightarrow Q$	$P \wedge P \Leftrightarrow P$ $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$ $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$ $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ $P \wedge T \Leftrightarrow P$ $P \wedge F \Leftrightarrow F$ $\neg P \wedge P \Leftrightarrow F$ $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$ $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee Q$ $(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow Q \rightarrow \neg P$	شرکت پذیری جابجایی توزیع پذیری عضو خنثی عضو صفر عضو وارون دمورگان

دوگانی (همزادی – Duality)

دو رابطه $\vee$ و $\wedge$ دوگان یکدیگرند و از آنجا که همه روابط از جمله $\rightarrow$ و $\leftrightarrow$ از سه رابطه $\wedge$ و $\vee$ و $\neg$ بدست می آیند، تعریف دوگانی را می توان براساس سه رابطه فوق بیان نمود.

دوگان: دو گزاره دوگان یکدیگر نامیده می شوند، اگر هر یک بتوانند از تبدیل رابطه های $\wedge$ به $\vee$ و برعکس و نیز ثابتهای T به F و برعکس بدست آیند. دوگان گزاره A با A^* نمایش داده می شود. بعنوان مثال دوگان گزاره:

$$\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg(Q \wedge \neg S)) \vee F$$

$$\neg(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg(Q \vee \neg S)) \wedge T$$

برابر است با:

قضیه: اگر دو گزاره A و A^* همزاد یکدیگر باشند و $P_1, P_2, \dots, P_n$ گزاره های بکار رفته در A و A^* باشند آنگاه:

$$\neg A(P_1, P_2, \dots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$$

$$A(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1, P_2, \dots, P_n)$$

قضیه: اگر $A \Leftrightarrow B$ باشد آنگاه روابط $A^* \Leftrightarrow B^*$ و $\neg A^* \Leftrightarrow \neg B^*$ نیز برقرار خواهند بود.

استلزام منطقی

استلزام منطقی: گزاره A، مستلزم گزاره B نامیده می شود اگر $A \rightarrow B$ و تنها اگر یک گزاره همیشه درست باشد بصورت $A \Rightarrow B$ نمایش داده می شود.

نکته: علائم $\Leftrightarrow$ و $\Rightarrow$ رابط منطقی نیستند و در نتیجه عبارات $A \Leftrightarrow B$ و $A \Rightarrow B$ گزاره مرکب نمی باشند.

برای اثبات اینکه $A \rightarrow B$ یک گزاره همیشه درست است ($A \Rightarrow B$) می توان به گزاره A (مقدم) ارزش T نسبت داد و اثبات نمود که این نسبت منجر به T شدن ارزش B (تالی) می گردد و یا به گزاره B (تالی) ارزش F را نسبت داد و اثبات نمود که منجر به F شدن ارزش A (مقدم) می گردد.

مجموعه رابط‌های منطقی کامل

مجموعه‌ای از رابط‌های منطقی که تمام عبارات و گزاره‌های دلخواه را بتوان با استفاده از آنها بیان نمود. «مجموعه کامل از رابط‌های منطقی» و یا «مجموعه رابط‌های منطقی کامل» نامیده می‌شوند به عبارت دیگر می‌توان هر فرمول دلخواهی را بصورت فرمولی هم ارز آن نوشت که در آن تنها رابط‌های منطقی مذکور بکار رفته باشد. بعنوان مثال گزاره $P \leftrightarrow Q$ را بصورت‌های زیر می‌توان نوشت:

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \{ \rightarrow, \leftarrow, \wedge \}$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P) \{ \neg, \vee, \wedge \}$$

$$\Leftrightarrow (\neg(P \wedge \neg Q)) \wedge (\neg(Q \wedge \neg P)) \{ \neg, \wedge \}$$

مجموعه‌های $\{ \neg, \vee \}$ و $\{ \neg, \wedge \}$ مجموعه‌های کامل از رابط‌های منطقی هستند ولی مجموعه‌های $\{ \vee, \wedge \}$, $\{ \wedge \}$, $\{ \vee \}$, $\{ \neg \}$ مجموعه‌های کامل نیستند.

رابط منطقی $\uparrow$ NAND: این رابط، ترکیبی از دو رابط AND و NOT است:

$$P \uparrow Q \Rightarrow \neg(P \wedge Q)$$

رابط منطقی NOR ($\downarrow$): این رابط، ترکیبی از دو رابط OR و NOT است:

$$P \downarrow Q \Leftrightarrow \neg(P \vee Q)$$

نکته: مجموعه‌های $\{ \uparrow \}$ و $\{ \downarrow \}$ نیز مجموعه‌های کامل هستند.

فرمول‌های نرمال

DNF (Disjunctive Normal Form): هم ارز یک فرمول که بصورت مجموع حاصل ضرب‌ها بیان شده باشد که با استفاده از $\sum$ نیز نمایش داده می‌شود.

CNF (Conjunctive Normal Form): هم ارز یک فرمول که بصورت حاصل ضرب مجموع‌ها بیان شده باشد که با استفاده از $\prod$ نیز نمایش داده می‌شود.

مینترم (Minterm): ترکیب عطفی متغیرهای دلخواه (گزاره‌نماها) که در آن متغیر تنها یک بار یا به صورت اصلی و یا به صورت نفی ظاهر شده باشد مینترم نامیده می‌شود (مینترمها با m نمایش داده می‌شوند).

ماکسترم (Maxterm): ترکیب فصلی متغیرهای دلخواه (گزاره‌نماها) که در آن هر متغیر تنها یک بار یا به صورت اصلی و یا بصورت نفی ظاهر شده باشد ماکسترم نامیده می‌شود (ماکسترمها با M نمایش داده می‌شوند).

جدول. مینترمها و ماکسترمهای قابل تولید با سه متغیر P ، Q و R .

m_0	$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	M_0	$P \vee Q \vee R$
m_1	$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$	M_1	$P \vee Q \vee \neg R$
m_2	$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	M_2	$P \vee \neg Q \vee R$
m_3	$\neg P \wedge Q \wedge R$	M_3	$P \vee \neg Q \vee \neg R$
m_4	$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	M_4	$\neg P \vee Q \vee R$
m_5	$P \wedge \neg Q \wedge R$	M_5	$\neg P \vee Q \vee \neg R$
m_6	$P \wedge Q \wedge \neg R$	M_6	$\neg P \vee \neg Q \vee R$
m_7	$P \wedge Q \wedge R$	M_7	$\neg P \vee \neg Q \vee \neg R$

PDNF: هم ارز یک فرمول که بصورت مجموع مینترمها بیان شده باشد.

PCNF: هم ارز یک فرمول که بصورت حاصل ضرب ماکسترمها بیان شده باشد.

روش بدست آوردن DNF و CNF

در مراحل زیر DNF و CNF یک گزاره (فرمول) بدست می آید:

الف) همه الفاظ بجز $\neg, \vee, \wedge$ حذف می شوند (به ترکیبی از $\neg, \vee, \wedge$ تبدیل می شوند).

ب) اگر بخشی از فرمول بصورت نفی $\neg$ ظاهر شده باشد با استفاده از قوانین دمورگان، $\neg$ فقط به متغیرها منتسب می شود.

ج) اگر بخشی از فرمول بصورت حاصل ضرب مجموعها بیان شده باشد با استفاده از توزیع پذیری $\wedge$ و $\vee$ آنرا به مجموع حاصل

ضربها تبدیل می کنیم (DNF) و اگر بصورت مجموع حاصل ضربها بود به حاصل ضرب مجموعها تبدیل می شود (CNF).

بعنوان مثال فرمول $P \wedge (P \rightarrow Q)$ بصورت زیر به DNF تبدیل می گردد:

$$P \wedge (P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge (\neg P \vee Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg P) \rightarrow \neg(P \wedge Q)$$

و یا فرمول $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q)$ بصورت زیر به CNF تبدیل می شود:

$$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg(P \vee Q) \rightarrow (P \wedge Q)) \wedge ((P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q))$$

$$\Leftrightarrow ((P \vee Q) \vee (P \wedge Q)) \wedge (\neg(P \wedge Q) \vee \neg(P \vee Q))$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee P) \wedge (P \vee Q \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg P) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg Q)$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$$

خواص مینترمها و ماکسترمها

مینترمها و ماکسترمها دارای خواص زیر می‌باشند:

۱- متمایز از یکدیگرند.

۲- هر مینترم تنها به ازای یک ترکیب دارای ارزش T و ماکسترم فقط به ازای یک ترکیب دارای ارزش F می‌باشد.

۳- اگر n تعداد متغیرها، باشد 2^n مینترم و یا ماکسترم موجود است.

$$M_0, M_1, \dots, M_{2^n} = 1 \text{ یا } m_0, m_1, \dots, m_{2^n} = 1$$

۴- درایه T در جدول درستی نشان دهنده مینترمها و درایه F نشان دهنده ماکسترمها می‌باشد.

۵- مینترمها و ماکسترمها دوگان یکدیگرند.

نکته: اندیسهایی از m که در PCNF موجود نیست، قطعاً بعنوان اندیسهای M در PDNF وجود دارند بعنوان نمونه اگر یک فرمول با سه متغیر را بتوان بصورت:

$$\sum(1, 6, 7) \Leftrightarrow m_1 \vee m_6 \vee m_7$$

بیان کرد، همین فرمول قابل ارائه بصورت:

$$\prod(0, 2, 3, 4, 5) = M_0 \wedge M_2 \wedge M_3 \wedge M_4 \wedge M_5$$

می‌باشد که همان صورت PDNF است.

مثال:

• جدول درستی گزاره $(\neg p \downarrow \neg q)$ را تشکیل دهید.

NOR

• جدول درستی گزاره $(\neg p \downarrow \neg q)$ را تشکیل دهید.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \downarrow \neg q$
T	T	F	F	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	F

p	q	$p \downarrow q$
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	T

T 1
F 0

• جدول درستی گزاره $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$ را تشکیل دهید.

• جدول درستی گزاره $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$ را تشکیل دهید.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

مثال:

• جدول درستی گزاره $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$ را تشکیل دهید.



• جدول درستی گزاره $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$ را تشکیل دهید.

p	q	r	$q \leftrightarrow r$	$p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

مثال:

• جدول درستی گزاره $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \rightarrow \neg p)$ را تشکیل دهید.

• جدول درستی گزاره $\overbrace{(q \rightarrow \neg p)}^A \leftrightarrow \overbrace{(p \leftrightarrow q)}^B$ را تشکیل دهید.

p	q	$\neg p$	$\overbrace{q \rightarrow \neg p}^A$	$\overbrace{p \leftrightarrow q}^B$	$A \leftrightarrow B$
T	T	F	F	T	F
T	F	F	T	F	F
F	T	T	T	F	F
F	F	T	T	T	T

هم ارزی

دو گزاره را منطقیاً هم ارز می گویند که ارزش های راستی آنها هم یکسان باشد.

$$P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$$

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \rightarrow \neg P$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

مثال:

• نشان دهید دو گزاره مرکب $(p \wedge q) \rightarrow r$ و $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ منطقا هم ارزند.

• نشان دهید دو گزاره مرکب $(p \wedge q) \rightarrow r$ و $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ منطقاً هم ارزند.

$$(p \wedge q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

$\downarrow$ p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow r$	$\downarrow$ $q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

قانون های منطقی

<i>Equivalence</i>	<i>Name</i>
$p \wedge \mathbf{T} \equiv p$ $p \vee \mathbf{F} \equiv p$ $p \cdot 1 \equiv p$ $p + 0 \equiv p$	Identity laws
$p \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$ $p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$ $p + 1 \equiv 1$ $p \cdot 0 \equiv 0$	Domination laws
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$ $p + p \equiv p$ $p \cdot p \equiv p$	Idempotent laws

$$\neg(\neg p) \equiv p$$

$$\overline{\overline{p}} \equiv p$$

Double negation law

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p + q = q + p$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$$p \cdot q = q \cdot p$$

Commutative laws

$$p \vee \neg p \equiv \mathbf{T}$$

$$p + \overline{p} \equiv 1$$

$$p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$$

$$p \cdot \overline{p} \equiv 0$$

Negation laws

قانونهای منطقی

برای گزاره‌های p, q, r

قانون نقیض مضاعف	$\bar{\bar{p}} \Leftrightarrow p$	۱.
قانونهای دمورگن	$\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$	۲.
	$\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$	
قانونهای تعویضپذیری	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$	۳.
	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	
قانونهای شرکتپذیری*	$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$	۴.
	$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$	
قانونهای توزیعپذیری	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	۵.
	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	
قانونهای خودتوانی	$p \vee p \Leftrightarrow p$	۶.
	$p \wedge p \Leftrightarrow p$	
قانونهای همانی	$p \vee F. \Leftrightarrow p$	۷.
	$p \wedge T. \Leftrightarrow p$	
قانونهای عکس	$p \vee \bar{p} \Leftrightarrow T.$	۸.
	$p \wedge \bar{p} \Leftrightarrow F.$	
قانونهای غلبه	$p \vee T. \Leftrightarrow T.$	۹.
	$p \wedge F. \Leftrightarrow F.$	
قانونهای جذب	$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$	۱۰.
	$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$	

قوانین شرکت پذیری

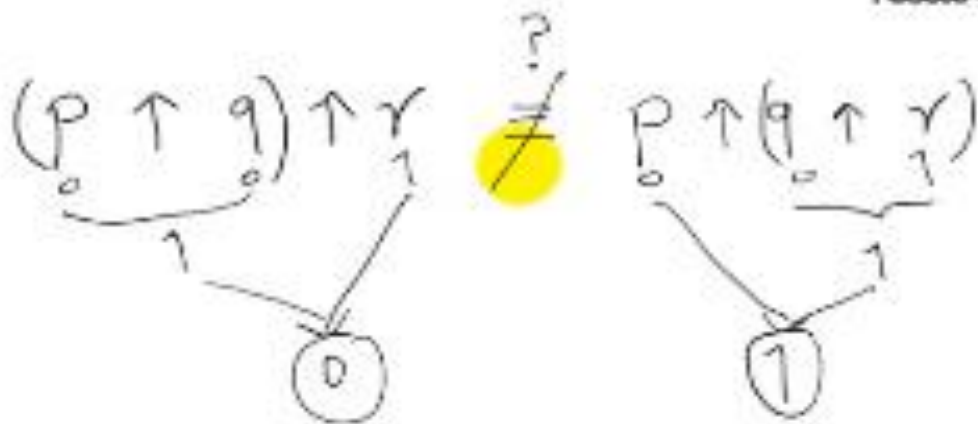
عملگرهای and و or و xor شرکت پذیرند.

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

عملگرهای NAND و NOR و شرطی، شرکت پذیر نمی باشند.



$$p=0 \quad q=0 \quad r=1$$

قوانین توزیع پذیری

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

قانون جذب

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

$$p(p+q) \equiv p$$

$$\begin{cases} p + p q \equiv p \\ p(\overline{1+q}) \equiv p \end{cases}$$

$$p + \overline{p} q = p + q$$

نجم جذب:

• هم ارز عبارت $[(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)] \vee q$ را مشخص کنید.

• هم ارز عبارت $\underbrace{[(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)]}_p \vee q$ را مشخص کنید.

$$[p \vee \underbrace{(q \wedge \neg q)}_F] \vee q$$

$$p \vee q$$

• عملگر AND بر روی XOR توزیع پذیر است.

• عملگر AND بر روی عملگر دو شرطی توزیع پذیر نیست.

$$p \wedge (q \leftrightarrow r) \stackrel{?}{=} (p \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge r) \quad p=0$$

Diagram illustrating the distributive property of AND over XOR. The left side shows $p \wedge (q \leftrightarrow r)$ with a bracket underneath labeled 0. The right side shows $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge r)$ with a bracket underneath labeled 1. A question mark is placed above the equivalence symbol. The value $p=0$ is written to the right.

قوانین دموورگان

$$\overline{\neg(p \wedge q)} \equiv \neg p \vee \neg q \quad \checkmark$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$\overline{p \cdot q} \equiv \bar{p} + \bar{q}$$

$$\overline{p + q} \equiv \bar{p} \cdot \bar{q}$$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

بسط قوانین دموورگان

$$\neg(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \equiv (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \cdots \wedge \neg p_n)$$

$$\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \equiv (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \cdots \vee \neg p_n).$$

$$\overline{p_1 + p_2 + p_3} \equiv \overline{p_1} \cdot \overline{p_2} \cdot \overline{p_3}$$

$$\overline{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4} \equiv \overline{p_1} + \overline{p_2} + \overline{p_3} + \overline{p_4}$$

• نقیض عبارت مقابل را مشخص کنید.

$$p \vee (\neg p \wedge q)$$

• نقیض عبارت مقابل را مشخص کنید.

$$\overline{p \vee (\neg p \wedge q)} = ?$$

$$\bar{p} \wedge (\overline{\bar{p} \wedge q}) = \bar{p} \wedge (\bar{\bar{p}} \vee \bar{q}) = \bar{p} \wedge (p \vee \bar{q})$$

$$= (\bar{p} \wedge p) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) = F \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) = \bar{p} \wedge \bar{q}$$

خواص گزاره ها:

$$q \vee p \equiv p \vee q \quad , \quad q \wedge p \equiv p \wedge q \quad \text{جابجایی:}$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \quad , \quad (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \quad \text{شرکت پذیری:}$$

$$\sim p \wedge \sim q \equiv \sim (p \vee q) \quad , \quad \sim p \vee \sim q \equiv \sim (p \wedge q) \quad \text{قانون دمورگان:}$$

$$p \equiv p \vee p \quad , \quad p \equiv p \wedge p \quad \text{فرد توانی:}$$

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \equiv p \wedge (q \vee r) \quad , \quad (p \vee q) \wedge (p \vee r) \equiv p \vee (q \wedge r) \quad \text{پخش پذیری:}$$

$$T \equiv p \vee T \quad , \quad p \equiv p \vee F \quad , \quad p \equiv p \wedge T \quad , \quad F \equiv p \wedge F \quad \text{همانی:}$$

$$T \equiv p \vee \sim p \quad , \quad F \equiv p \wedge \sim p \quad \text{متمم:}$$

$$\sim \sim p \equiv p \quad \text{نقیض دوگانه:}$$

$$p \equiv p \vee (p \wedge q) \quad , \quad p \equiv p \wedge (p \vee q)$$

جذبی :

• هم ارزی زیر را نشان دهید.

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$$

• هم ارزی زیر را نشان دهید.

$$\underline{p \rightarrow (q \rightarrow r)} \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$$

$$\bar{p} \vee (q \rightarrow r)$$

$$\bar{p} \vee (\bar{q} \vee r)$$

$$(\bar{p} \vee \bar{q}) \vee r$$

$$(\overline{p \wedge q}) \vee r \equiv p \wedge q \rightarrow r$$

$$p \rightarrow q \equiv \bar{p} \vee q$$

تاتولوژی (همان گویی)

• تاتولوژی: گزاره همیشه درست

$$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$$

$$\overline{(p \wedge q)} \vee (p \vee q)$$

$$(\overline{p} \vee \overline{q}) \vee (p \vee q)$$

$$\overline{p} \vee \overline{q} \vee p \vee q$$

$$\underbrace{\overline{p} \vee p}_T \vee \underbrace{\overline{q} \vee q}_T = T \vee T \equiv T$$

$$p \vee \neg p \equiv T$$

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
T	F	T
F	T	T

$$p \rightarrow q \equiv \overline{p} \vee q$$

گزاره ي راستگو :

ارزش درستی گزاره هاي مبناي تشکيل دهنده آن همواره راست باشد.

نکته: دو گزاره را به طور منطقی هم ارز گوئيم اگر به ازاي هر ترکيب همسان از ارزش گزاره هاي مبناي تشکيل دهنده آنها مقادير درستی یکسانی داشته باشند.

(با گزاره هاي هم ارز ميتوان گزاره هاي پیچيده را با گزاره هاي ساده جایگزین کرد)

$$p \equiv q$$

گزاره همیشه نادرست:

گزاره ای که صرف نظر از ارزش مولفه های آن همیشه ارزش F داشته باشد را گزاره همیشه نادرست میگویند.

• نشان دهید گزاره زیر راست‌گو است.

$$[\sim (p \wedge q) \rightarrow (\sim p \vee (\sim p \vee q))] \leftrightarrow (\sim p \vee q)$$

• نشان دهید گزاره زیر راستگو است.

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

$$\underbrace{[\neg(p \wedge q) \rightarrow (\overbrace{\neg p \vee q}^{\neg p \vee q})]}_{(\neg p \vee q)} \leftrightarrow (\neg p \vee q)$$

$$\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee q) \equiv \neg p \vee q$$

$$(p \wedge q) \vee (\neg p \vee q)$$

$$\underbrace{(p \vee \neg p) \vee q}_{\text{True}} \wedge (q \vee (\neg p \vee q)) = q \vee \neg p \vee q = q \vee \neg p$$

تناقض

تناقض: گزاره همیشه نادرست

مثال: نشان دهید گزاره $p \wedge (\neg p \wedge q)$ همیشه نادرست است.

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$p \wedge (\neg p \wedge q)$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	1	0	0	0

دوگانگی

• با تعویض and با or و برعکس و تعویض T به F و برعکس، می‌توان دوگان یک گزاره را به دست آورد.

$$A = p \vee q$$

$$A^* = p \wedge q$$

$$A = (p \wedge \bar{q}) \vee (\tau \vee p)$$

$$A^* = (p \vee \bar{q}) \wedge (F \wedge p)$$

صورت نرمال گزاره ای

• صورت نرمال فصلی (DNF): نوشتن گزاره به فرم مجموع حاصل ضربها

$$\text{DNF: } \underbrace{p \cdot \bar{q} \cdot r} + \underbrace{\bar{p} \cdot q \cdot r} + \underbrace{p \cdot q}$$

$$(p \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q)$$

$$\text{PDNF: } p\bar{q}r + \bar{p}qr + pq(r + \bar{r}) = p\bar{q}r + \bar{p}qr + pqr + pq\bar{r}$$

• صورت نرمال عطفی (CNF): نوشتن گزاره به فرم حاصل ضرب مجموعها

$$\text{CNF: } \underbrace{(p + \bar{q} + r)} \cdot \underbrace{(\bar{p} + q + r)} \cdot \underbrace{(p + q)}$$

$$\text{PCNF: } (p + \bar{q} + r) (\bar{p} + q + r) (p + q + \bar{r})$$

تابع ارزش

• تابع V ، تابع ارزش است:

$$V(p) = \begin{cases} 1 & p = T \\ 0 & p = F \end{cases}$$

• نشان دهید که:

$$V(q \rightarrow (p \wedge q)) \underset{\uparrow}{\equiv} 1 - (V(q) (1 - V(p)))$$

عملگرهای منطقی کامل

• مجموعه‌ای از عملگرهای منطقی که بتوان همه گزاره‌های عبارات منطقی را با استفاده از اعضای این مجموعه بیان کرد.

مانند: {1}

$$\text{NOT} : P \uparrow P = \bar{P}$$

$$\text{AND} : (P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q) = P \wedge Q$$

$$\text{OR} : (P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q) = P \vee Q$$

$$\overline{P \cdot P} = \bar{P}$$

$$\overline{(\overline{P \cdot Q}) \cdot (\overline{P \cdot Q})} = \overline{\overline{P \cdot Q}}$$

$$= P \cdot Q$$

$$\overline{(\overline{P \cdot P}) \cdot (\overline{Q \cdot Q})} = \overline{\bar{P} \cdot \bar{Q}} = P + Q$$

قاعده‌های استنتاج (Rules of Inference)

قواعد استنتاج توضیح می‌دهد که چگونه از مجموعه‌ای از فرض‌های درست می‌توانیم یک نتیجه منطقی بگیریم.

استنتاج

قیاس تعدی (قانون قیاس)

قیاس استثنایی (قاعده وضع مقدم) (Modus Ponens)

قیاس عکس (قاعده رفع تالی) (قیاس رفع) (Modus Tollens)

ترکیب عطفی

قیاس فصلی

رزولوشن

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

$$p_1, p_2, \dots, p_n \vdash q$$

$$\underbrace{(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q}_{\text{TT}}$$

قياس تعدی (Hypothetical syllogism)

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

$$\begin{aligned} & ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r) \\ & ((\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{q} \vee r)) \rightarrow (\bar{p} \vee r) \\ & ((p \wedge \bar{q}) \vee (q \wedge \bar{r})) \vee (\bar{p} \vee r) \\ & [(p \wedge \bar{q}) \vee \bar{p}] \vee [(q \wedge \bar{r}) \vee r] \\ & [(\underbrace{p \vee \bar{p}}_T) \wedge (\bar{q} \vee \bar{p})] \vee [(q \vee r) \wedge (\underbrace{\bar{r} \vee r}_T)] \\ & (\bar{q} \vee \bar{p}) \vee (q \vee r) \\ & \underbrace{\bar{q} \vee q}_{T} \vee \bar{p} \vee r = T \vee \bar{p} \vee r = \textcircled{T} \end{aligned}$$

قیاس استثنایی (Modus Ponens)

$$\frac{p \rightarrow q \quad p}{\therefore q}$$

$$[(P \rightarrow q) \wedge P] \rightarrow q$$

$$[(\bar{P} \vee q) \wedge P] \rightarrow q$$

$$[(\bar{P} \vee q) \wedge P] \vee q$$

$$[(P \wedge \bar{q}) \vee \bar{P}] \vee q$$

$$[(\underbrace{P \vee \bar{P}}_T) \wedge (\bar{q} \vee \bar{P})] \vee q$$

$$(\bar{q} \vee \bar{P}) \vee q = T \vee \bar{P} = \textcircled{T}$$

قیاس عکس (Modus Tollens)

$$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \bar{q} \end{array}}{\therefore \bar{p}}$$

$$[(P \rightarrow q) \wedge \bar{q}] \rightarrow \bar{P}$$

ترکیب عطفی - ساده سازی ترکیب عطفی

$$\frac{p \wedge q}{\therefore p}$$

$$\frac{p \wedge q}{\therefore q}$$

$$\begin{array}{l} p \wedge q \rightarrow p \\ \bar{p} \vee \bar{q} \vee p \\ T \vee \bar{q} \\ T \end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{l} p \\ q \end{array}}{\therefore p \wedge q} \quad (p \wedge q) \rightarrow (p \wedge q)$$

قیاس فصلی - بسط فصلی

$$\frac{p \vee q \quad \neg p}{\therefore q}$$

$\frac{p}{\therefore p \vee q.}$	$p \rightarrow p \vee q$ $\bar{p} \vee p \vee q$ $T \vee q$ T
----------------------------------	---

$$\begin{aligned}
 & [(p \vee q) \wedge \bar{p}] \rightarrow q \\
 & [(\underbrace{p \wedge \bar{p}}_F) \vee (q \wedge \bar{p})] \rightarrow q \\
 & \quad (q \wedge \bar{p}) \rightarrow q
 \end{aligned}$$

$\rightarrow \bar{q} \vee p \vee q$
 $= T \vee p$
 $= T$

رزولوشن (Resolution)

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \vee r \\ \hline \therefore q \vee r \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \bar{q} \rightarrow p \\ p \rightarrow r \\ \hline \therefore \bar{q} \rightarrow r \end{array}$$

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

مثال

• نشان دهید استنتاج زیر معتبر است.

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg p \rightarrow r \\ r \rightarrow s \\ \hline \therefore \neg q \rightarrow s \end{array}$$

مثال

• نشان دهید استنتاج زیر معتبر است.

$$\begin{array}{l}
 p \rightarrow q \\
 \neg p \rightarrow r \\
 r \rightarrow s \\
 \hline
 \therefore \neg q \rightarrow s
 \end{array}$$

دلیل	step
فرض	1. $p \rightarrow q$
کلی نقیض	2. $\neg q \rightarrow \neg p$
مف	3. $\neg p \rightarrow r$
تقدیر (۲) و (۳)	4. $\neg q \rightarrow r$
مف	5. $r \rightarrow s$
تقدیر (۴) و (۵)	6. $\neg q \rightarrow s$

مثال

- نشان دهید استنتاج زیر معتبر است.

$$\neg p \wedge q$$

$$r \rightarrow p$$

$$\neg r \rightarrow s$$

$$s \rightarrow t$$

$$\therefore t$$

مثال

• نشان دهید استنتاج زیر معتبر است.

$$\begin{array}{l}
 \neg p \wedge q \\
 r \rightarrow p \\
 \neg r \rightarrow s \\
 s \rightarrow t \\
 \hline
 \therefore t
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 p \rightarrow q \\
 \underline{p} \\
 \therefore q
 \end{array}$$

Step	دلیل	$p \rightarrow q$ $\neg q$ $\hline \therefore \neg p$
1. $\neg p \wedge q$	فرض	
2. $\neg p$	بسیار (1)	
3. $r \rightarrow p$	مفروضه	
4. $\neg r$	modus tollens (2), (3)	
5. $\neg r \rightarrow s$	فرض	
6. s	modus ponens (4), (5)	
7. $s \rightarrow t$	فرض	
8. t	modus ponens (6), (7)	

مثال

▪ نشان دهید استنتاج زیر معتبر است.

$$\mathbf{A} \rightarrow (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$$

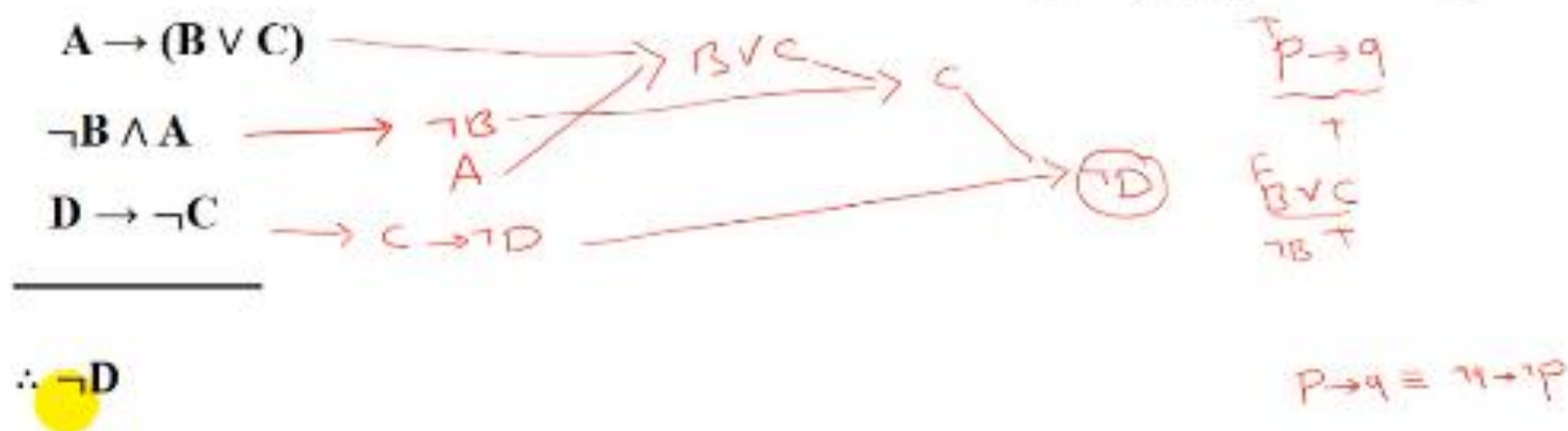
$$\neg \mathbf{B} \wedge \mathbf{A}$$

$$\mathbf{D} \rightarrow \neg \mathbf{C}$$

$$\therefore \neg \mathbf{D}$$

مثال

• نشان دهید استنتاج زیر معتبر است.



مثال

- اگر کودک گرسنه باشد، گریه خواهد کرد.
- اگر کودک ناراحت نباشد، گریه نخواهد کرد.
- اگر کودک ناراحت باشد، صورتش سرخ خواهد شد.
- بنابراین اگر کودک گرسنه باشد، آن گاه صورتش سرخ خواهد شد.

مثال

$$\begin{array}{l}
 p \rightarrow q \\
 \neg r \rightarrow \neg q \\
 r \rightarrow s \\
 \hline
 \therefore p \rightarrow s
 \end{array}$$

• اگر کودک گرسنه باشد، گریه خواهد کرد.

• اگر کودک ناراحت نباشد، گریه نخواهد کرد.

• اگر کودک ناراحت باشد، صورتش سرخ خواهد شد.

• بنابراین اگر کودک گرسنه باشد، آن گاه صورتش سرخ خواهد شد.

ردیف	دلیل
1	$p \rightarrow q$ مفروضه
2	$\neg r \rightarrow \neg q$ مفروضه
3	$\neg q \rightarrow \neg p$ معکوس وارز 1
4	$\neg r \rightarrow \neg p$ قیاس برابری 2 و 3
5	$r \rightarrow p$ نفی
6	$p \rightarrow r$ معکوس وارز 5
7	$p \rightarrow s$ قیاس برابری 6 و 4

$$\begin{array}{l}
 p \rightarrow q \\
 \neg r \rightarrow \neg q \\
 r \rightarrow s \\
 \hline
 \therefore p \rightarrow s
 \end{array}$$

مثال

- برهانی برای استدلال زیر ارائه دهید.
- اگر سارا شغل سرپرستی را به دست آورد و سخت کار کند، آنگاه ترفیع می‌گیرد.
- اگر ترفیع بگیرد ماشین نو خواهد خرید.
- او ماشین نو نخریده است،
- بنابراین یا سارا شغل سرپرستی را به دست نیاورده است یا سخت کار نکرده است.

مثال

• برهانی برای استدلال زیر ارائه دهید.

- اگر سارا شغل سرپرستی را به دست آورد و سخت کار کند، آنگاه ترفع می‌گیرد.
 • اگر ترفع بگیرد ماشین نو خواهد خرید.
 • او ماشین نو نخریده است،

• بنابراین یا سارا شغل سرپرستی را به دست نیاورده است یا سخت کار نکرده است.

$$\begin{array}{l} p \wedge q \rightarrow r \\ r \rightarrow s \\ \sim s \\ \hline \therefore \bar{p} \vee \bar{q} \end{array}$$

ردیف	پیش‌فرض	توضیح
1	$\sim s$	فرض
2	$r \rightarrow s$	فرض
3	$\sim r$	تبعاً سریع از 2
4	$p \wedge q \rightarrow r$	فرض
5	$\sim(p \wedge q)$	تبعاً سریع از 4

$$\begin{array}{l} \bar{r} \rightarrow \bar{s} \\ \bar{r} \rightarrow s \\ \hline \bar{r} \end{array}$$

مثال

- نشان دهید استنتاج زیر معتبر است.

$$u \rightarrow r$$

$$(r \wedge s) \rightarrow (p \vee t)$$

$$q \rightarrow (u \wedge s)$$

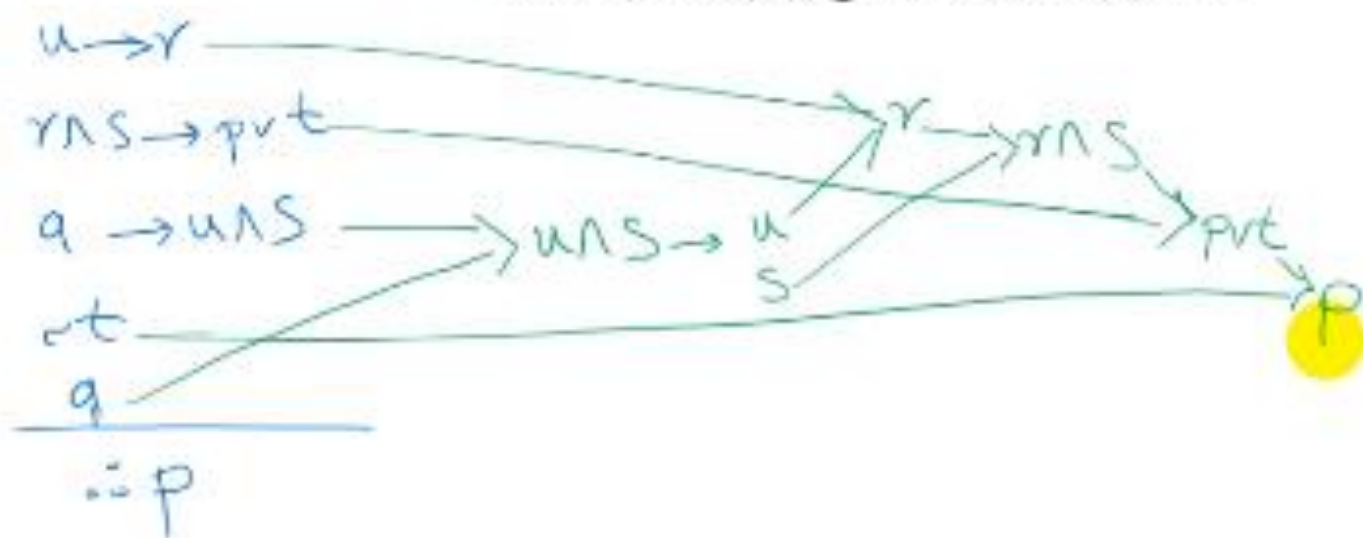
$$\sim t$$

$$\therefore q \rightarrow p$$

مثال

• نشان دهید استنتاج زیر معتبر است.

$$\begin{array}{l}
 u \rightarrow r \\
 (r \wedge s) \rightarrow (p \vee t) \\
 q \rightarrow (u \wedge s) \\
 \sim t \\
 \hline
 \therefore q \rightarrow p
 \end{array}$$



سازگاری

- مجموعه گزاره‌های p و p_2 و ... و p_n را سازگار می‌گویند، اگر ترکیب عطفی آنها به ازای حداقل یک حالت از ارزش متغیرهای ساده موجود در مجموعه درست باشد.

سازگاری

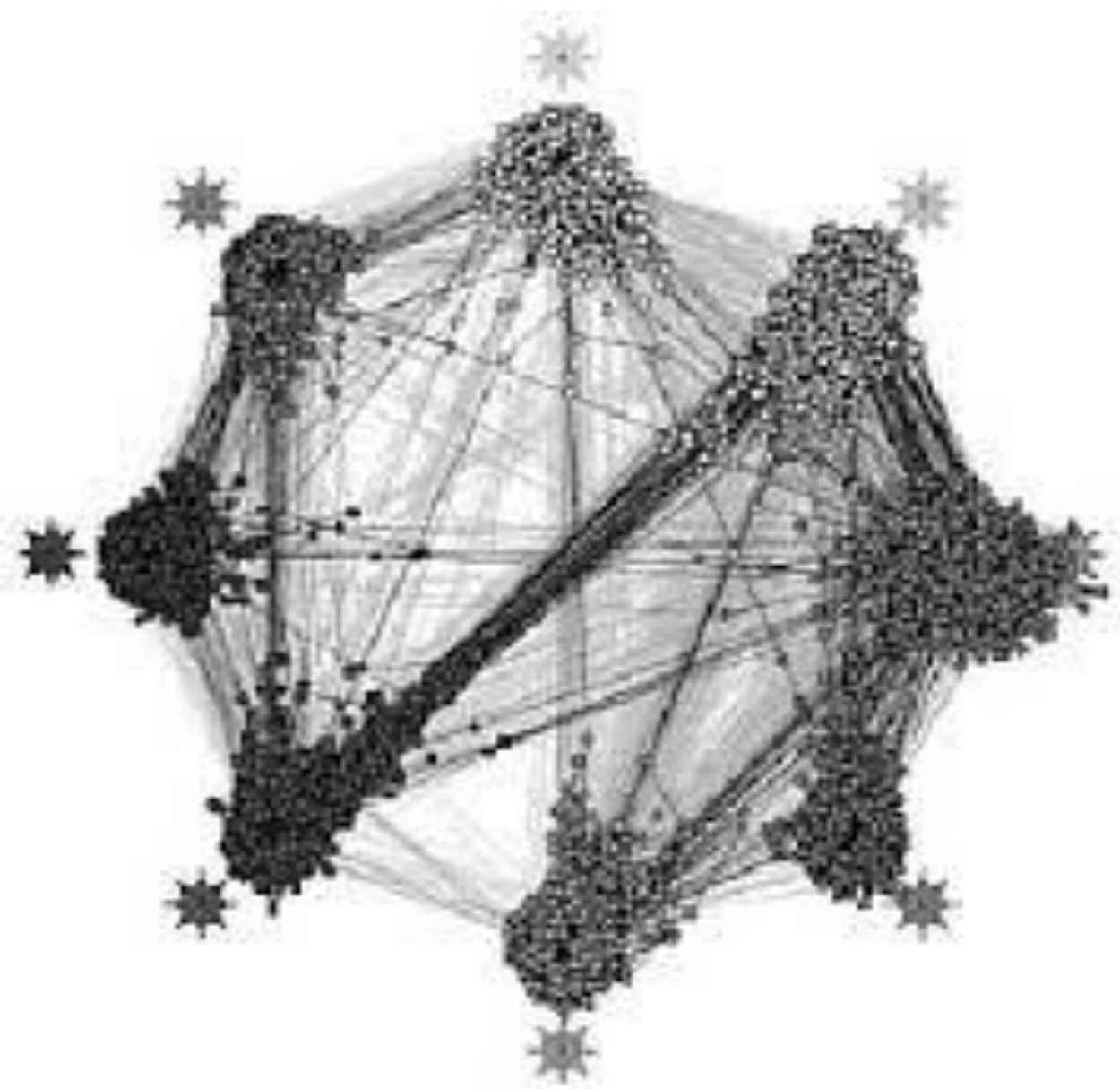
- مجموعه گزاره‌های p و p_2 و ... و p_n را سازگار می‌گویند، اگر ترکیب عطفی آنها به ازای حداقل یک حالت از ارزش متغیرهای ساده موجود در مجموعه درست باشد.

مثال: نشان دهید مجموعه گزاره‌های زیر سازگارند.

$$\{ \underbrace{p \vee q}_T, \underbrace{\neg p}_T, \underbrace{p \rightarrow q}_T \}$$

$$\begin{array}{l} p = \text{False} \\ q = \text{True} \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$(p \vee q) \wedge (\neg p) \wedge (p \rightarrow q) = T$$



گراف

تئوری گراف

گراف

عبارت است از مجموعه‌ای از نقاط به نام گره (node) که بین آنها ممکن است روابطی برقرار باشد. هر گراف بصورت سه تایی مرتب (V, E, φ) نمایش داده می‌شود که در آن V مجموعه‌ی غیرتهی از گره‌ها، E مجموعه لبه‌ها و φ نگاشتی از مجموعه‌ی E به سوی مجموعه‌ای از زوجهای مرتب یا غیرمرتب حاصل از $V \times V$ می‌باشد (زوج غیرمرتب زوجی است که ترتیب آنها نسبت به هم اهمیتی نداشته باشد). در صورتی که هر لبه بطور مستقیم متناظر با یک زوج مرتب یا غیرمرتب باشد، سه تایی مرتب (V, E, φ) می‌تواند بصورت زوج مرتب نیز $\langle V, E \rangle$ بیان شود.

نکته: محل قرار گرفتن گره‌ها در یک گراف از نظر هندسی منحصر به فرد نیست و آنچه اهمیت دارد فقط ارتباط بین گره‌هاست.

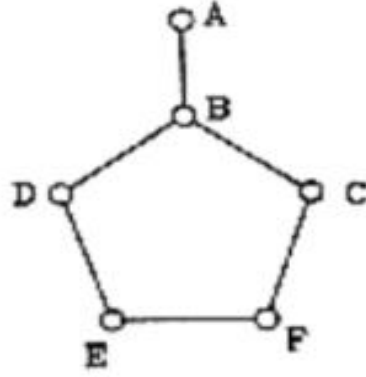
انواع گراف و تعاریف مربوطه

گراف جهت‌دار (Digraph): $D = \langle V, E \rangle$ که در آن V مجموعه‌ای از گره‌ها و $E \subseteq V \times V$ مجموعه‌ای است که به هر زوج مرتب در آن یک «لبه» یا «کمان» یا «یال» گفته می‌شود.

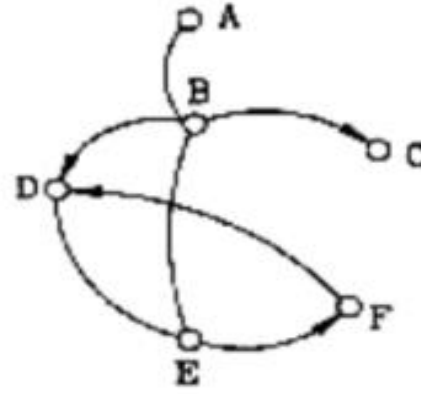
گراف غیرجهت‌دار (Undirect Graph): گرافی است که در آن همه‌ی لبه‌ها یا کمانها «زوجهای غیرمرتب» باشند.

گراف مخلوط (Mixed Graph): گرافی است که در آن بعضی از لبه‌ها جهت‌دار و بعضی غیرجهت‌دار باشند.

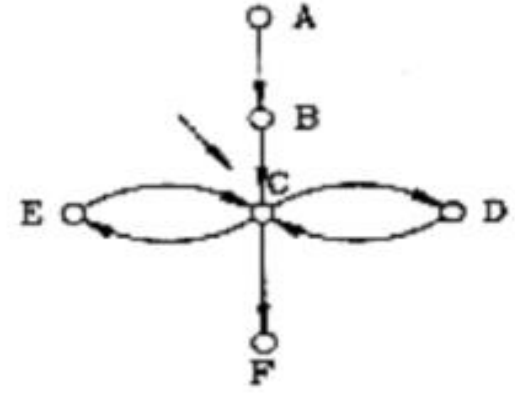
نمونه‌هایی از گرافهای یاد شده در شکل زیر نشان داده شده است.



(ج)



(ب)



(الف)

نمونه‌ای از گراف‌های (الف) جهت‌دار (ب) مخلوط (ج) غیرجهت‌دار

گراف وزن‌دار (Weighted Graph): گرافی که در آن به هر لبه وزنی نسبت داده شود «گراف وزن‌دار» نامیده می‌شود، این وزن می‌تواند تعداد لبه‌های هم‌جهت باشد.

گره‌های مجاور: اگر بین دو گره لبه‌ای (جهت‌دار یا بدون جهت) موجود باشد، آن دو گره «گره‌های مجاور» نامیده می‌شوند.

گره منفرد (Isolated Node): گره‌ای که با هیچ گره‌ی دیگری مجاور نباشد.

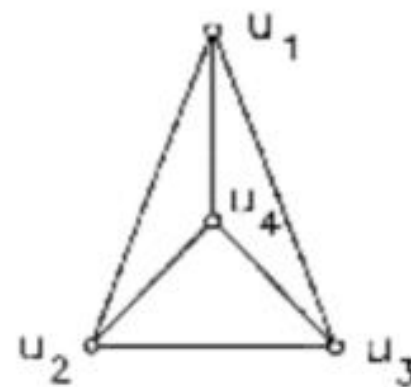
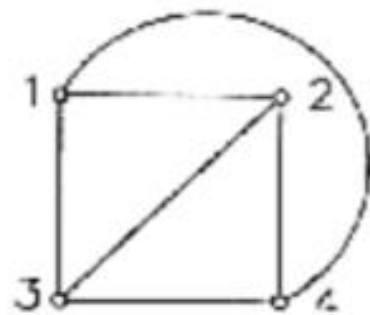
گراف پوچ (Null graph): گرافی که فقط شامل گره‌های منفرد باشد، «گراف پوچ» نامیده می‌شود.

گراف کامل: گرافی است که بدون در نظر گرفتن جهت لبه‌ها بین هر دو گره‌ی متمایز آن یک لبه موجود باشد. یک

گراف کامل با n گره با k_n نمایش داده می‌شود.

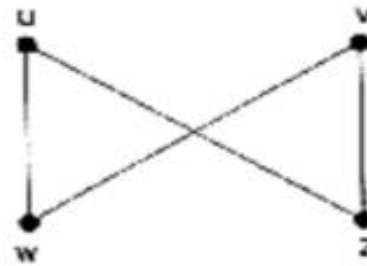
گراف مکمل یک گراف: مکمل گراف $G = (V, E)$ گراف $G' = (V, E')$ است که در آن $E' = E_k - E$ بطوری که $G_k = (V, E_k)$ یک گراف کامل باشد.

گراف‌های ایزومورفیک: دو گراف «ایزومورفیک» هستند اگر تناظر یک به یک بین گره‌ها و لبه‌های دو گراف وجود داشته باشد، بطوری که مجاورت گره‌ها همچنین جهت لبه‌ها در صورت وجود حفظ شوند. شکل زیر نمونه‌ای از دو گراف ایزومورفیک را نشان می‌دهد.



نمونه‌ای از دو گراف ایزومورفیک

گراف دو قسمتی: در گراف $G = (V, E)$ اگر V_1, V_2 لایر مجموعه‌هایی از V باشند بگونه‌ای که $V = V_1 \cup V_2$ و هر لبه‌ی موجود در گراف G یک گره از V_1 را به یک گره از V_2 وصل کند، آنگاه گراف G یک «گراف دو قسمتی» است. شکل زیر یک گراف دو قسمتی را نشان می‌دهد.



گراف دو قسمتی

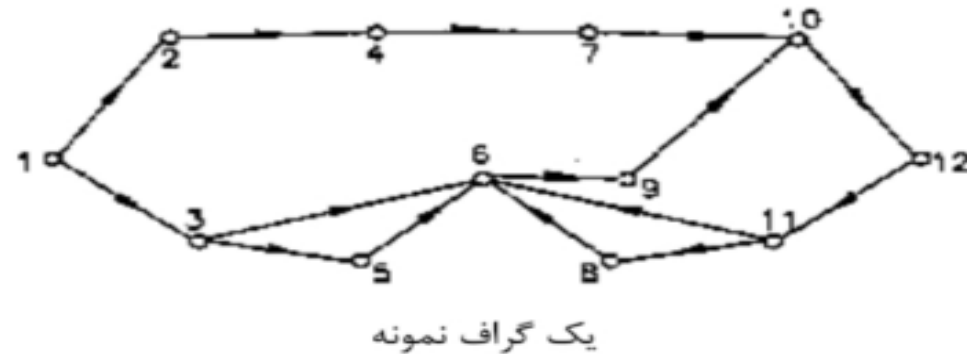
$$V_1 = \{u, v\} \quad ; \quad V_2 = \{w, z\}$$

درجه ورودی و خروجی گره: در یک گراف جهت‌دار برای هر گره، تعداد لبه‌هایی که آغاز آنها در این گره باشد، «درجه خروجی» (Outdegree) یا $\deg^+$ گره و تعداد لبه‌هایی که پایان آنها در این گره باشد، «درجه‌ی ورودی» (Indegree) یا $\deg^-$ گره نامیده می‌شود. برای گرافهای غیرجهت‌دار درجه‌ی هر گره جمع تعداد لبه‌های متصل به گره است.

درجه‌ی ورودی و خروجی مجموعه‌ای از گره‌ها: اگر $G = \langle V, E \rangle$ گراف جهت‌دار و $X \subseteq V$ باشد، تعداد لبه‌هایی از G را که گره‌ی آغاز آنها در X ولی گره‌ی پایانی آنها در X نباشد، «درجه‌ی خروجی مجموعه‌ی X » و بطور مشابه تعداد لبه‌هایی از G را که گره پایانی آنها در X ولی گره‌ی آغازی آنها در X نباشد، «درجه‌ی ورودی مجموعه‌ی X » گفته می‌شود.

مسیر و انواع آن

مسیر: هر دنباله از لبه‌های یک گراف اعم از جهت‌دار و غیر جهت‌دار که در آن گره‌ی پایانی هر لبه‌ی واقع در دنباله، گره‌ی آغازی لبه‌ی بعدی باشد، یک «مسیر» از گراف گفته می‌شود. بعنوان مثال در گراف شکل P_1 یک مسیر را مشخص می‌نماید.



$$P_1 = \{ \langle 1,2 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 4,7 \rangle, \langle 7,10 \rangle, \langle 10,12 \rangle \}$$

مسیر P_1 با گره‌ی شماره‌ی 1 شروع می‌شود و با گره‌ی شماره‌ی 12 پایان می‌یابد.

طول مسیر: تعداد لبه‌های تشکیل‌دهنده‌ی یک مسیر، «طول مسیر» گفته می‌شود.

مسیر ساده: مسیری که در آن هیچ لبه‌ای بیش از یک بار ظاهر نشده باشد «مسیر ساده» نامیده می‌شود.

مسیر اصلی (Elementary Path - ابتدایی): مسیری که در آن از هیچ گره‌ای بیش از یک بار عبور نشده باشد، «مسیر اصلی» گفته می‌شود.

نکته: اگر مسیری اصلی باشد حتماً ساده است ولی مسیر ساده لزوماً اصلی نخواهد بود.

مدار: مسیری است که در آن رأس انتهایی مسیر و رأس ابتدایی آن بر هم منطبق باشند.

مدار ساده: مداری است که شامل لبه‌ای تکراری نباشد.

مدار اصلی (مدار ابتدایی – دور): مداری است که در آن از هیچ گره‌ای بیش از یک بار عبور نشود.

نکته: به مدار با تعریف فوق گاهی لفظ «سیکل» نیز اطلاق می‌شود.

نکته: اگر مسیری اصلی نباشد حتما در آن مدار وجود دارد که اگر مدار حذف شود یک مسیر اصلی بوجود خواهد آمد.

حلقه: لبه‌ای است که گره‌ی ابتدایی و انتهایی آن یک گره باشد.

دسترس پذیری (Reachable-Accessable): در یک گراف جهت‌دار $G = \langle V, E \rangle$ که $a, b \in V$ گفته می‌شود گره‌ی b از

گره‌ی a دسترس‌پذیر یا قابل دسترسی است، اگر مسیری از گره‌ی a به b در گراف وجود داشته باشد. فرض بر این است که هر گره با مسیری به طول صفر توسط خودش قابل دسترسی است.

نکته: دسترس‌پذیری دارای خواص انعکاسی و انتقالی است ولی خاصیت متقارن یا نامتقارن ندارد.

Geodesic (کوتاهترین مسیر): اگر گره‌ای از گره‌ی دیگر دسترس‌پذیر باشد، کوتاهترین مسیر بین آن دو «Geodesic» یا «مسیر با حداقل طول» گفته می‌شود.

فاصله‌ی دو گره: وقتی گره‌ای از گره‌ی دیگر دسترس‌پذیر باشد، طول کوتاهترین مسیر، «فاصله‌ی دو گره» نامیده می‌شود و

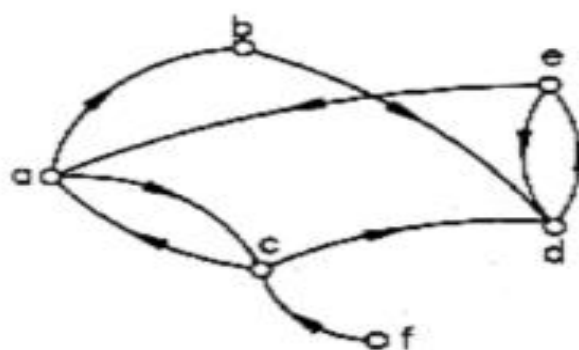
بصورت زیر نمایش داده می‌شود:

فاصله‌ی گره‌ی u از گره‌ی v $d < u, v > = v$

فاصله‌ی گره‌ی v از گره‌ی u $d < v, u > = u$

نکته: در یک گراف جهت‌دار برای دو گره که از یکدیگر دسترس‌پذیر باشند، ممکن است فاصله‌ی اولی تا دومی با فاصله‌ی دومی تا اولی برابر نباشد. اگر u از گره‌ی v دسترس‌پذیر نباشد می‌توان نوشت: $d < v, u > = \infty$ به‌عنوان مثالی از تعاریف فوق، در گراف شکل می‌توان نوشت:

$P_1 = \{ < a, c >, < c, d >, < d, e > \}$ یک مسیر اصلی از گره‌ی a به گره‌ی e با طول 3 می‌باشد و نیز همه گره‌ها بجز گره‌ی f از یکدیگر قابل دسترسی هستند. در این مثال بین گره‌های a, c, d دو مسیر بصورت زیر وجود دارند که هر دو به طول 3 هستند و می‌توان گفت $d < a, e > = 3$ ولی همانگونه که در شکل دیده می‌شود $d < e, a > = 1$ می‌باشد.



گراف و ماتریس مربوط به آن

$$P_1 = \{ < a, c >, < c, d >, < d, e > \}$$

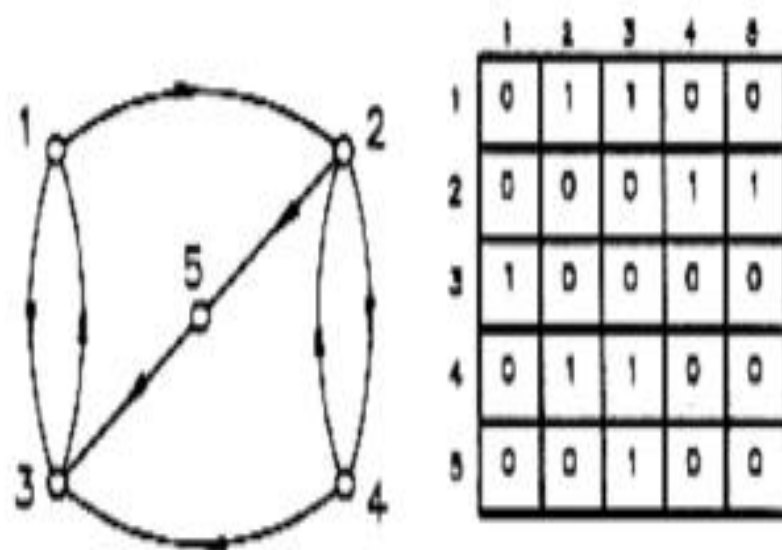
$$P_2 = \{ < a, b >, < b, d >, < d, e > \}$$

در این گراف مسیر $P_3 = \{ < a, c >, < c, d >, < d, e >, < e, a > \}$ یک مدار اصلی و ساده است.

نکته: در یک گراف جهت‌دار با n گره، طول مسیر اصلی حداکثر $n-1$ و طول یک مدار اصلی حداکثر n خواهد بود.

ماتریس گراف (همسایگی گراف)

این ماتریس مانند ماتریس روابط است. برای یک گراف جهت‌دار که دارای تعداد گرهی n است، ماتریس گراف بصورت $n \times n$ رسم می‌شود و به ازای هر لبه بین دو گرهی مجاور مقدار یک در خانه متناظر در ماتریس گراف منظور می‌گردد (فرض بر این است که لبه‌های موازی وجود ندارند). نمونه‌ای از ماتریس گراف در شکل آمده است.



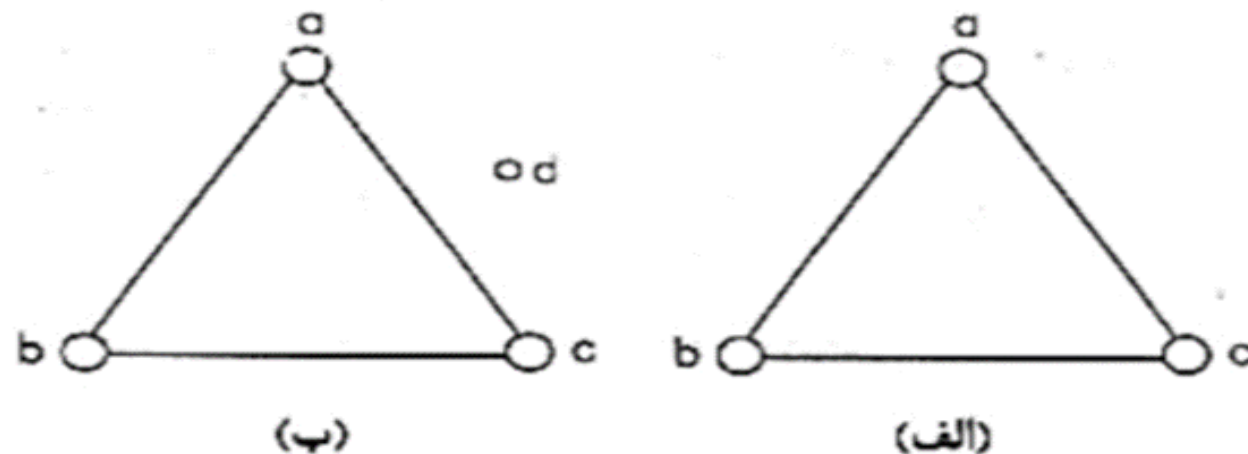
نکته: در ماتریس گراف وزن دار، وزن هر لبه بعنوان درایه‌ی ماتریس گراف منظور می‌شود.

گرافهای همبند (متصل)

مفهوم همبندی برای گرافهای جهت‌دار و غیرجهت‌دار متفاوت است که در ادامه گرافهای جهت‌دار همبند و گرافهای غیرجهت‌دار همبند معرفی می‌گردند.

گراف غیرجهت‌دار همبند

یک گراف غیرجهت‌دار، همبند گفته می‌شود اگر هر دو گرهی دلخواه از آن از یکدیگر دسترس‌پذیر باشند. شکل زیر یک گراف بی‌جهت همبند و یک گراف بی‌جهت ناهمبند را نشان می‌دهد.



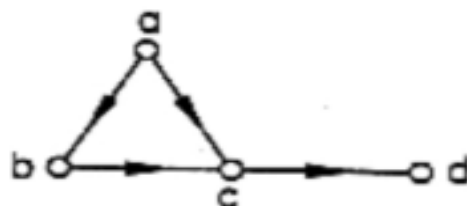
گرافهای بی‌جهت (الف) همبند (ب) ناهمبند

گراف جهت‌دار همبند

گراف‌های جهت‌دار به سه صورت می‌توانند متصل باشند:

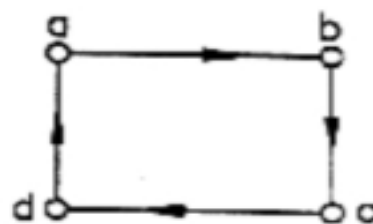
الف) متصل بطور ضعیف (Weakly Connected): یک گراف جهت‌دار است که بدون در نظر گرفتن جهت لبه‌ها، مانند یک گراف بدون جهت همبند باشد.

ب) متصل یک‌طرفه (Unilaterally Connected): یک گراف جهت‌دار است که برای هر دو گرهی دلخواه در آن حداقل یکی از دیگری دسترس‌پذیر باشد.



گراف متصل یک طرفه

ج) متصل قوی (Strongly Connected): یک گراف جهت‌دار است که برای هر دو گرهی دلخواه در آن هر دو از یکدیگر دسترس‌پذیر باشند.



گراف متصل قوی

مسیرها و مدارهای اولری

مسیر اولری: در یک گراف مسیری است که از هر یک از لبه‌های گراف فقط و فقط یکبار عبور کند.

مدار اولری: در یک گراف مداری است که از هر یک از لبه‌های گراف فقط و فقط یکبار عبور کند.

نکته: برای یک گراف غیر جهت‌دار $G = \langle V, E \rangle$ می‌توان نوشت:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E(G)|$$

که در آن $|E(G)|$ تعداد لبه‌های گراف G می‌باشد.

نکته: در یک گراف غیرجهت‌دار تعداد گره‌ها از درجه‌ی فرد همواره زوج است.

قضیه: شرط لازم و کافی برای وجود یک مدار اولری در یک گراف غیرجهت‌دار آن است که درجه‌ی همه‌ی گره‌های آن زوج باشد.

قضیه: شرط لازم و کافی برای وجود یک مسیر اولری در یک گراف غیرجهت‌دار آن است که همبند بوده و فقط دارای دو رأس از درجه‌ی فرد باشد.

قضیه: شرط لازم و کافی برای وجود یک مدار اولری در گراف جهت‌دار $G = (V, E)$ آن است که همبند بوده و برای هر $v \in V$

بتوان نوشت:

$$\deg^{-}(v) = \deg^{+}(v)$$

قضیه: شرط لازم و کافی برای وجود یک مسیر اولری در گراف جهت‌دار $\vec{G} = (V, E)$ است که همبند بوده و برای هر گره

$$\deg^{-}(v) = \deg^{+}(v)$$

$v \in V$ بتوان نوشت:

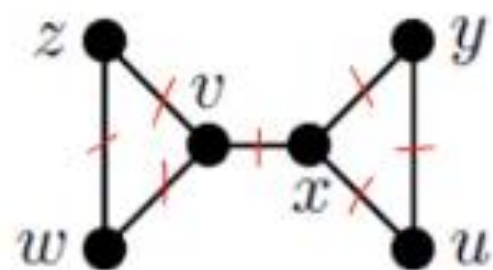
و یا دو گره v_1, v_2 یافت شوند که برای آنها رابطه زیر برقرار باشد:

$$\deg^{-}(v_2) = \deg^{+}(v_2) + 1$$

$$\deg^{-}(v_1) = \deg^{+}(v_1) + 1$$

تعریف گراف

گراف ساده: گراف G زوجی مرتب چون (V, E) است که در آن V مجموعه متناهی و ناتهی است و E زیر مجموعه‌ای از مجموعه تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی V است. اعضای V را رأس‌های G و اعضای E را یال‌های G می‌نامند.



$$G = (V, E)$$

$$V = \{z, w, v, x, y, u\}$$

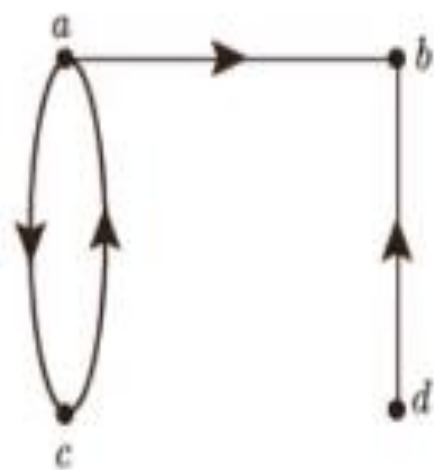
$$|V| = 6$$

$$E = \{ \{z, w\}, \{z, v\}, \{w, v\}, \{v, x\}, \{x, y\}, \{x, u\}, \{y, u\} \}$$

$$|E| = 7$$

گراف جهت دار

گراف جهت دار G زوجی مرتب چون (V, E) است که در آن V مجموعه متناهی و ناتهی است و E زیر مجموعه‌ای از مجموعه تمام زوج‌های مرتب متشکل از اعضای V است.



$$G = (V, E)$$

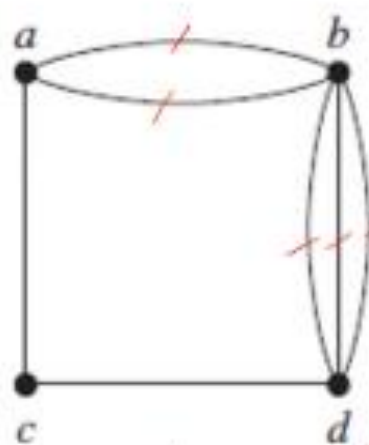
$$V = \{a, b, c, d\}$$

$$E = \{(a, b), (a, c), (c, a), (d, b)\}$$

گراف چندگانه

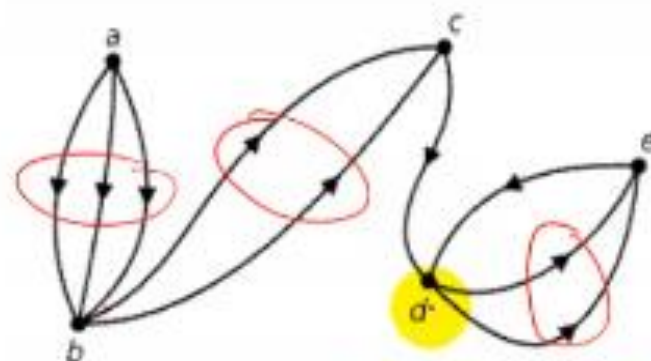
گراف $G=(V,E)$ را چندگانه می‌نامیم اگر برای بعضی $a,b \in V$ که $a \neq b$ ، دو یا چند یال به صورت (a,b) برای گراف جهت‌دار و یا به صورت $\{a,b\}$ برای گراف بدون جهت وجود داشته باشند.

یال $\{a,b\}$ به ۲ گانه



$\{c,d\}$ به ۲ گانه

(عرب) یال (a,b) به ۲ گانه

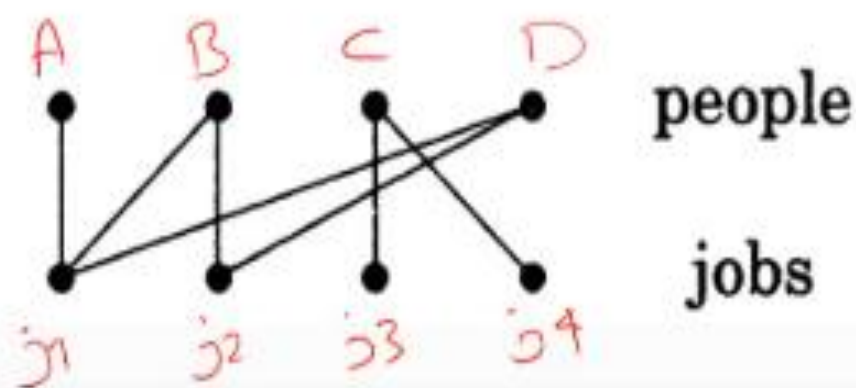


(d,e) به ۲ گانه

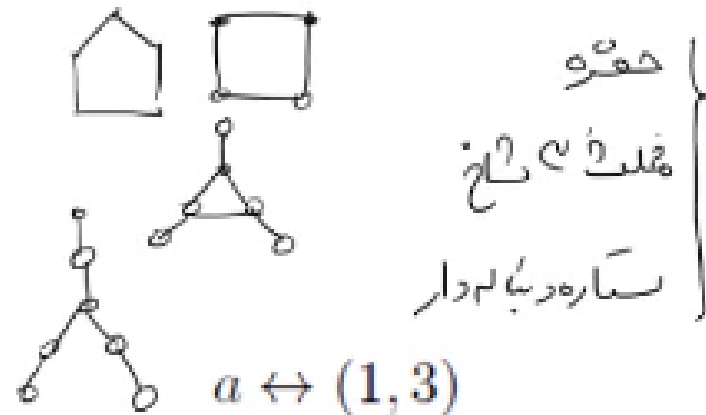
گراف مشاغل

• گرافی برای تقسیم مشاغل مختلف بین چند شخص.

واگذاری شغل‌ها، از کم متقاضی‌ترین شغل شروع شده و افرادی که شغل ثابتی دریافت می‌کنند کنار گذاشته می‌شوند تا بقیه شغل‌ها تقسیم شود.



گراف بازه (interval graph)

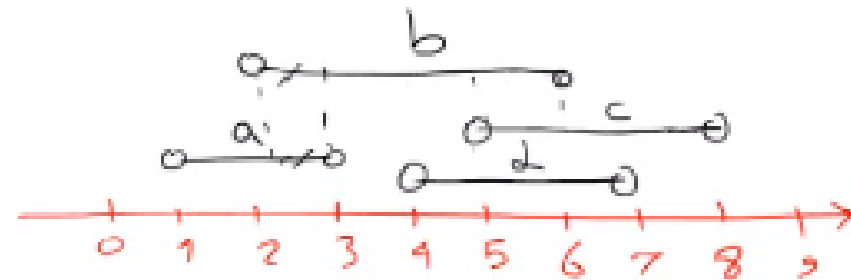


$$a \leftrightarrow (1, 3)$$

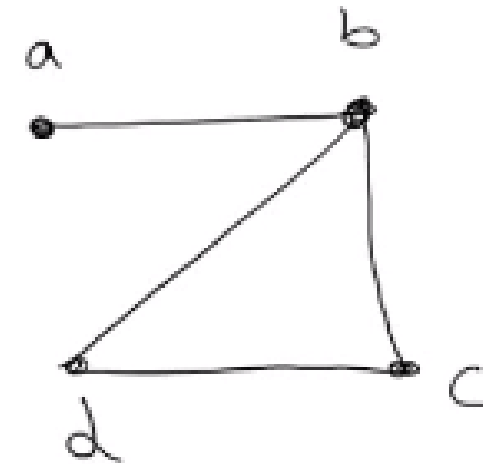
$$b \leftrightarrow (2, 6)$$

$$c \leftrightarrow (5, 8)$$

$$d \leftrightarrow (4, 7)$$

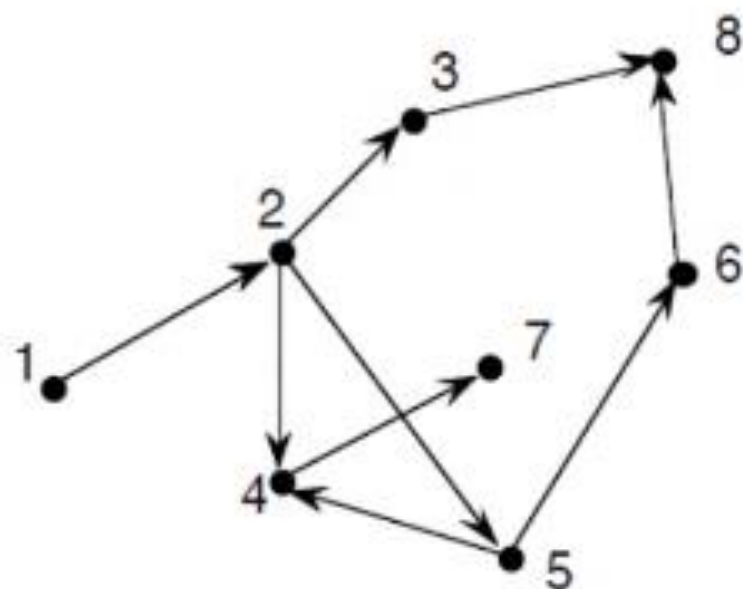


- گراف بازه‌ها : گرافی که راس‌های آن نظیر بازه‌های باز باشد.
- اگر بین دو بازه اشتراکی باشد، یالی بین آن‌ها رسم می‌شود.



مثال

• گراف جهت‌دار فعالیت برای ساختن خانه:

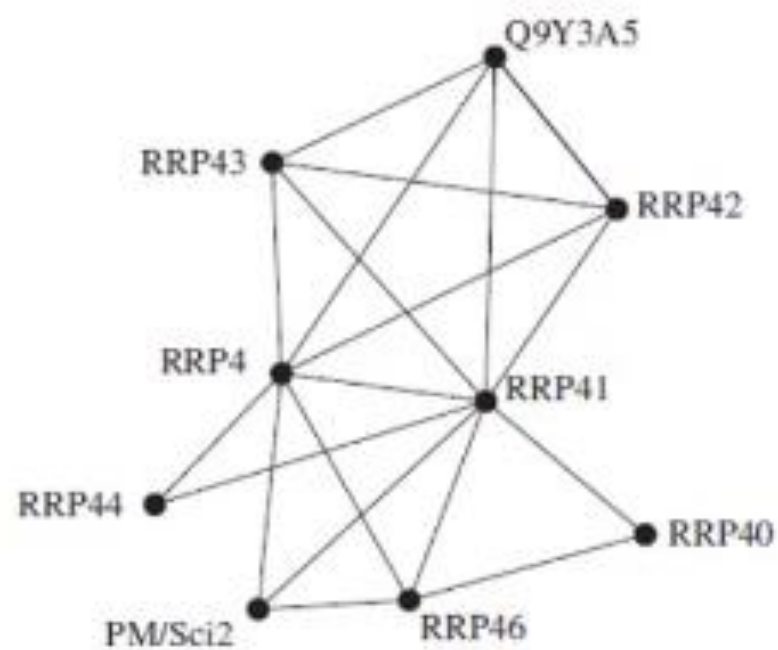


	Activities
1	Foundation
2	Walls and Ceilings
3	Roof
4	Electrical wiring
5	Windows
6	Siding
7	Paint interior
8	Paint exterior

An activity digraph for building a house

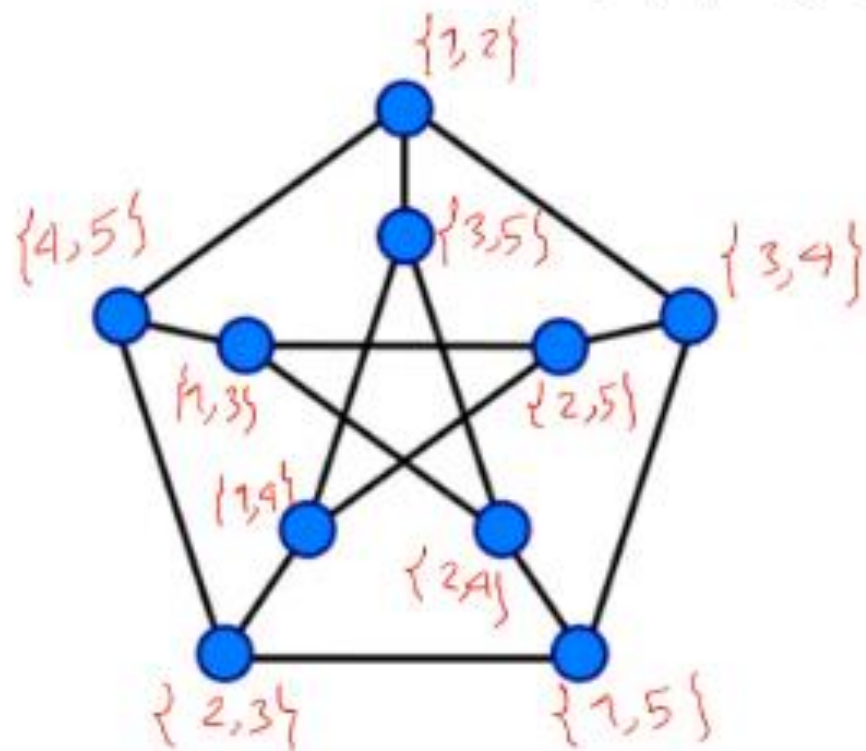
مثال

گراف ایترراکشن بین چند پروتئین:



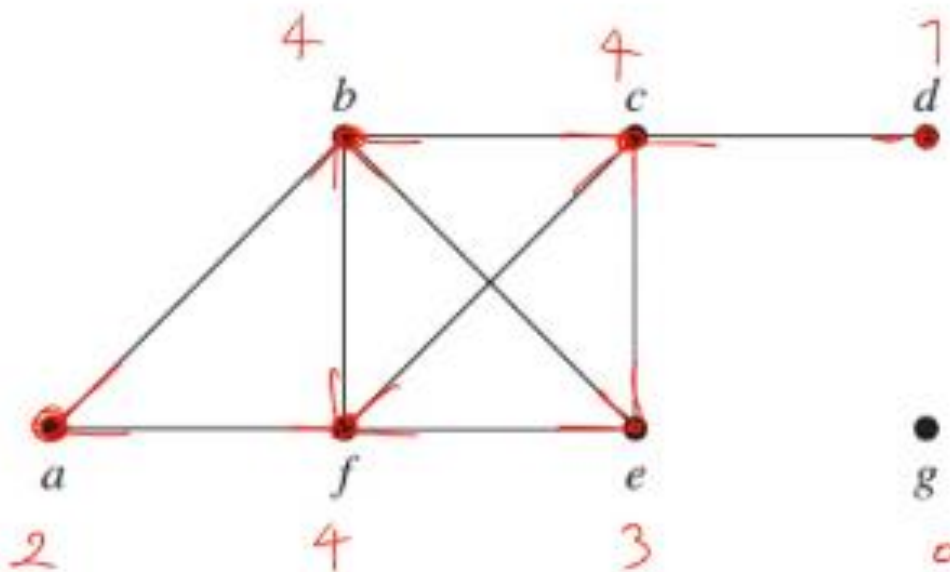
مثال

- مجموعه رئوس گراف G تمام زیرمجموعه‌های $\{1,2,3,4,5\}$ عنصری 2 است که راس x به y وصل است اگر و فقط اگر مجموعه x و y مجزا از هم باشند. این گراف را رسم کنید.



درجه رأس در گراف بدون جهت

درجه هر رأس در گراف بدون جهت، تعداد یال‌هایی است که از آن رأس می‌گذرد.



$$\deg(a) = 2$$

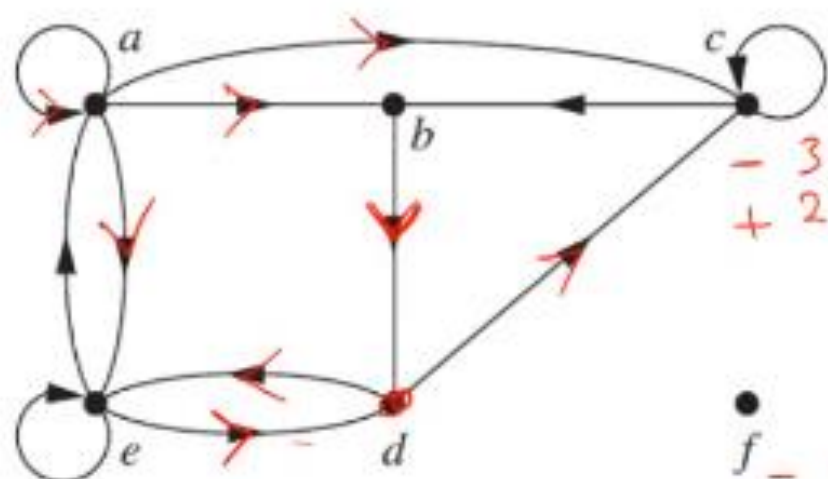
درجه رأس در گراف جهت‌دار

درجه ورودی هر رأس: $(-)$

تعداد یال‌هایی که آن رأس در آن‌ها، رأس انتهاپی است.

درجه خروجی هر رأس: $(+)$

تعداد یال‌هایی که آن رأس در آن‌ها، رأس ابتدایی است.



(a, b)

(c, b)

$$\deg^{-}(b) = 2$$

(b, d)

$$\deg^{+}(b) = 1$$

$$\begin{cases} \deg^{-}(d) = 2 \\ \deg^{+}(d) = 2 \end{cases}$$

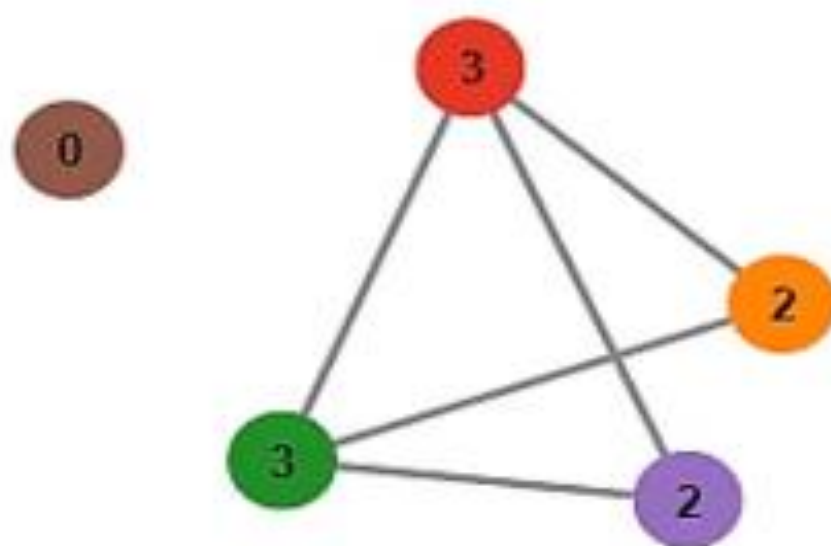
$$\begin{cases} \deg^{-}(a) = 2 \\ \deg^{+}(a) = 4 \end{cases}$$

f
 $- : 0$
 $+ : 0$

-3
 $+3$

حداقل و حداکثر درجه

δ
 Δ



$$\delta(G) = 0$$

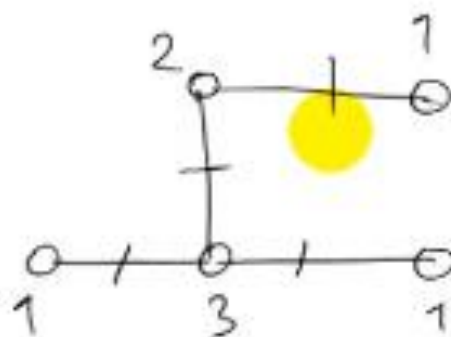
$$\Delta(G) = 3$$

قضیه

فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف بدون جهت (یا چندگانه) با m یال باشد. آنگاه:

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v) \rightarrow m = \frac{\sum \deg(v)}{2}$$

$$\text{تعداد یال ها} = \frac{\text{مجموع درجاتها}}{2}$$



$$1 + 3 + 1 + 2 + 1 = 8$$

$$m = \frac{8}{2} = 4$$

مجموع درجاتها

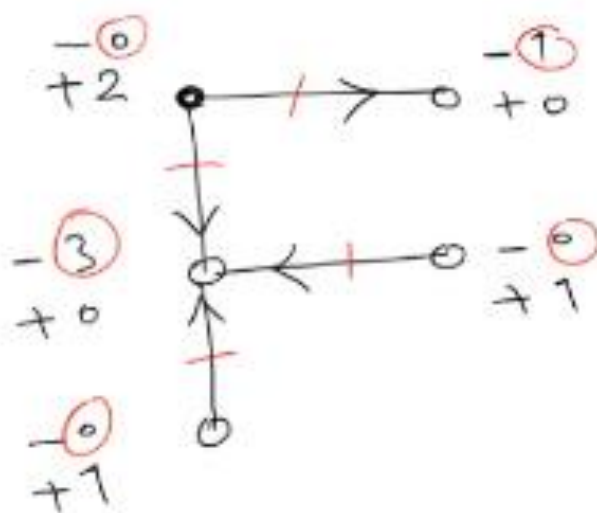
تعداد یال ها

قضیه

فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف جهت دار باشد. آنگاه:

$$\sum_{v \in V} \deg^-(v) = \sum_{v \in V} \deg^+(v) = |E|$$

4 4 4



مثال

تعداد یال‌های یک گراف با 10 رأس را مشخص کنید. (درجه هر رأس برابر 6 می‌باشد).

$$\text{تعداد یالها} = \frac{\text{مجموع درجه‌ها}}{2} = \frac{10 \times 6}{2} = 30$$

$$m = 30$$

مثال

- رابطه R روی گراف‌های متناهی از مرتبه 4 به صورت زیر تعریف شده است. تعداد کلاس‌های هم‌ارزی تحت این رابطه چند تا می‌باشد؟

$$G R H \leftrightarrow q(G) = q(H), \Delta(G) = \Delta(H)$$

مثال

• رابطه R روی گرافهای متناهی از مرتبه ۴ به صورت زیر تعریف شده است. تعداد کلاسهای

$$G R H \leftrightarrow \overset{\text{تعداد ریب}}{q(G)} = \overset{\text{مکسimum درج}}{q(H), \Delta(G) = \Delta(H)}$$

همارزی تحت این رابطه چند تا می باشد؟
 $p=4$
 تعداد رئوس

$q=0$	$q=1$	$q=2$	$q=2$	$q=3$	$q=3$	$q=4$	$q=4$	$q=5$
$\Delta=0$	$\Delta=1$	$\Delta=1$	$\Delta=2$	$\Delta=2$	$\Delta=3$	$\Delta=2$	$\Delta=3$	$\Delta=3$
								
$q=6$								
$\Delta=3$								
								

دنباله گرافی

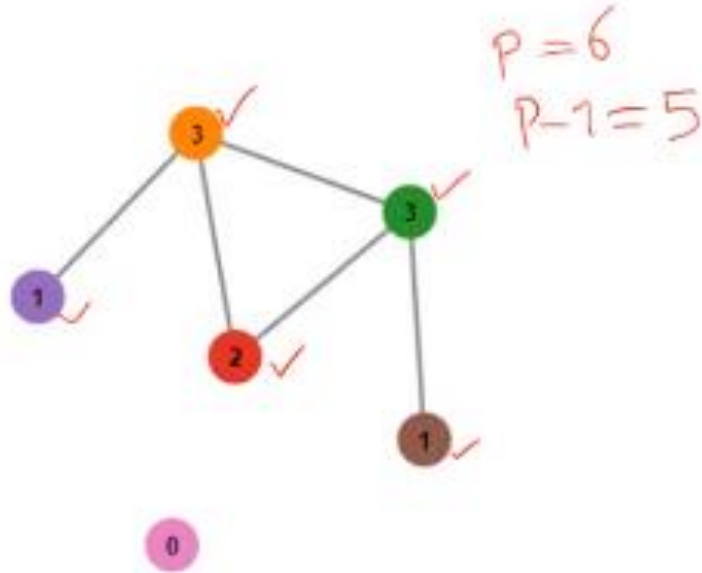
• دنباله گرافی : نوشتن دنباله درجات رئوس یک گراف به صورت نزولی.

$\langle 3, 3, 2, 1, 1, 0 \rangle$

• تعداد اعداد فرد دنباله، همواره زوج است.

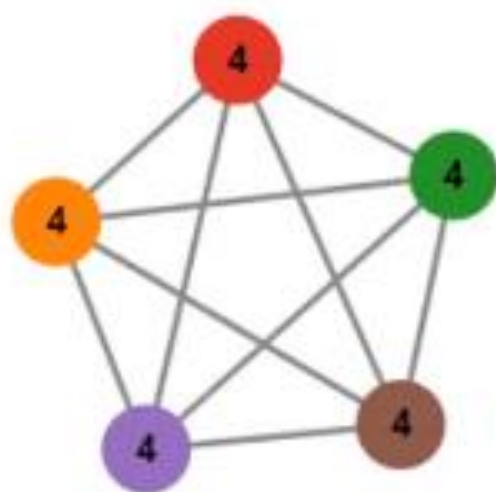
• حداقل دو عدد تکراری در دنباله وجود دارد.

• هیچ یک از اعداد دنباله از $(P-1)$ بزرگتر نیست.

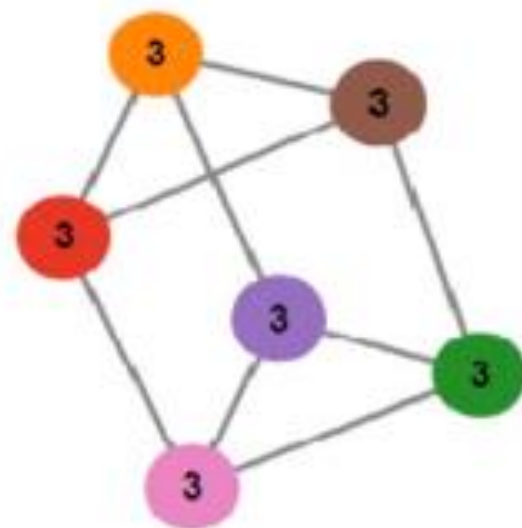


مثال

- دنباله گرافی را مشخص کنید.



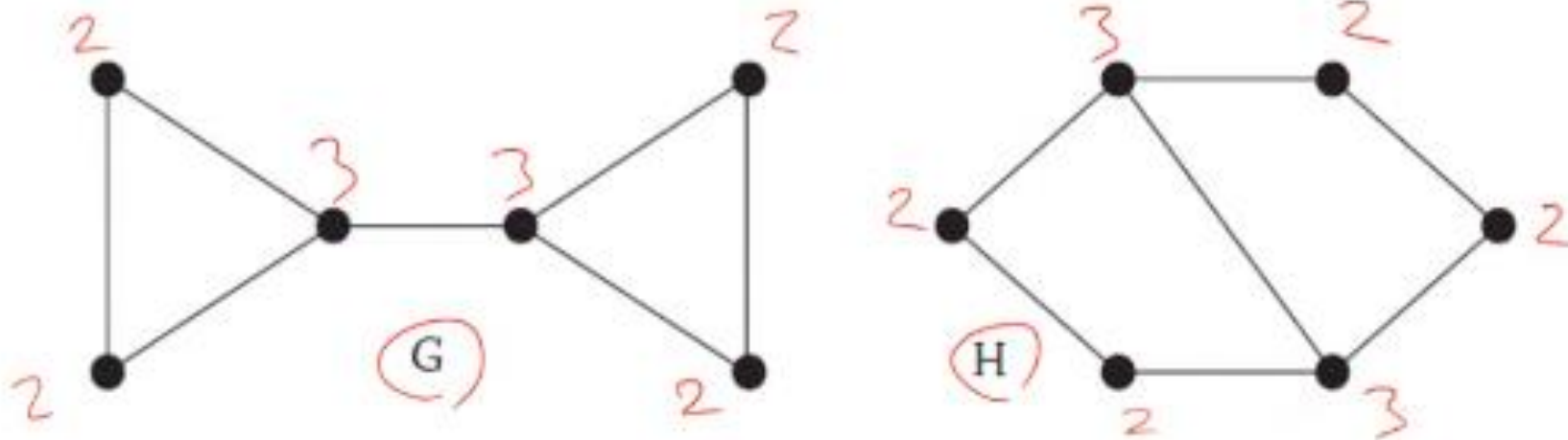
$\langle 4, 4, 4, 4, 4 \rangle$



$\langle 3, 3, 3, 3, 3, 3 \rangle$

مثال

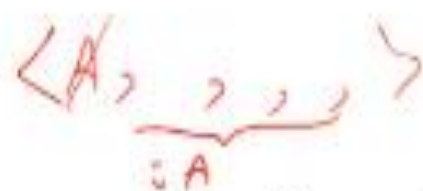
- دنباله گرافی هر دو گراف زیر یکسان است.



$\langle 3, 3, 2, 2, 2, 2 \rangle$

روش هاول - حکیمی

• روشی برای تشخیص معتبر بودن دنباله گرافی است.



الف) دنباله را به طور نزولی مرتب می‌کنیم.

ب) بزرگترین عدد (A) را حذف کرده و از A راس بعدی یک واحد کم می‌کنیم.

ادامه گام‌های فوق تا جایی که تشخیص دنباله میسر شود.

اگر دنباله مربوط به یک گراف ساده باشد، در انتها به دنباله‌ای که همه جملات آن صفر است

می‌رسیم.

مثال

• نشان دهید دنباله $\langle 3, 3, 2, 2, 1, 1 \rangle$ مربوط به یک گراف ساده است.

مثال

• نشان دهید دنباله $\langle 3, 3, 2, 2, 1, 1 \rangle$ مربوط به یک گراف ساده است.

$\langle 3, 3, 2, 2, 1, 1 \rangle$



$\langle 2, 1, 1, 1, 1 \rangle$



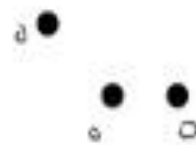
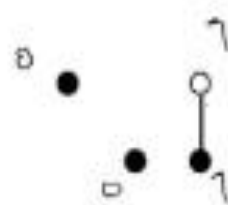
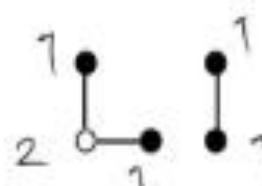
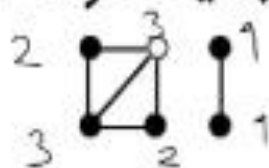
$\langle 0, 0, 1, 1 \rangle$



$\langle 1, 1, 0, 0 \rangle$



$\langle 0, 0, 0 \rangle$



~~$\langle 3, 3, 2, 2, 1, 1 \rangle$~~

~~$\langle 2, 1, 1, 1, 1 \rangle$~~

~~$\langle 0, 0, 1, 1 \rangle$~~

~~$\langle 1, 1, 0, 0 \rangle$~~

$\langle 0, 0, 0 \rangle$

مثال

• آیا دنباله $\langle 7, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 1 \rangle$ مربوط به یک گراف ساده است؟

مثال

• آیا دنباله $\langle \cancel{7}, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 1 \rangle$ مربوط به یک گراف ساده است؟

$$\langle \cancel{5}, 4, 3, 3, 2, 1, 0 \rangle$$

$$\langle \cancel{3}, 2, 2, 1, 0, 0 \rangle$$

$$\langle \cancel{1}, 1, 0, 0, 0 \rangle$$

$$\langle 0, 0, 0, 0 \rangle$$

مثال

• آیا دنباله $\langle 5, 5, 3, 3, 2, 2, 2 \rangle$ مربوط به یک گراف ساده است؟

مثال

• آیا دنباله $\langle 5, 5, 3, 3, 2, 2, 2 \rangle$ مربوط به یک گراف ساده است؟

$\langle 4, 2, 2, 1, 1, 2 \rangle$
مرتبه $\rightarrow \langle 4, 2, 2, 2, 1, 1 \rangle$

$\langle 1, 1, 1, 0, 1 \rangle$
مرتبه $\rightarrow \langle 1, 1, 1, 1, 0 \rangle$

$\langle 0, 1, 1, 0 \rangle$
مرتبه $\rightarrow \langle 1, 1, 0, 0 \rangle$

$\langle 0, 0, 0 \rangle$

انواع گراف‌های ساده

کامل

دور

چرخ

مکعب n بعدی

منتظم

دو قسمتی

گراف کامل

گراف کامل: گراف ساده‌ای که بین هر دو رأس متمایز آن دقیقاً یک یال وجود دارد.

همه رأس‌های آن با هم مجاورند.

$$K_n \quad \left\{ \begin{array}{ll} n & \text{تعداد رأس} \\ \frac{n(n-1)}{2} & \text{تعداد یال‌ها} \end{array} \right.$$



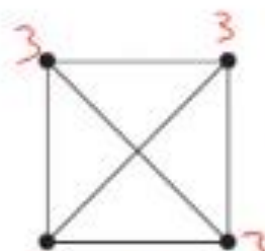
K_1



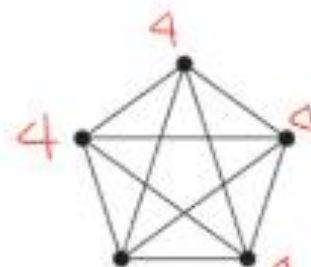
K_2



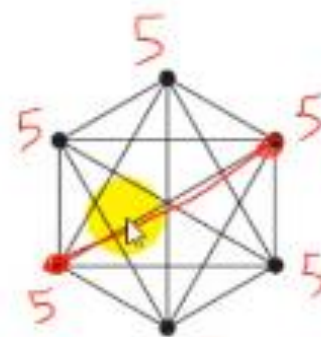
K_3



K_4



K_5



K_6

$$\frac{6 \times 5}{2} = 15$$

دور (سیکل)

یک سیکل C_n ، $(n \geq 3)$ ، شامل n رأس $v_1, v_2, \dots, v_n$ و یال‌های زیر می‌باشد.

$\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_{n-1}, v_n\}$, and $\{v_n, v_1\}$

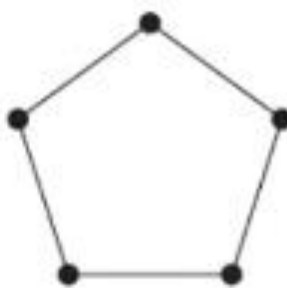
$C_3 \rightarrow v_1, v_2, v_3$
 $\{v_1, v_2\} \{v_2, v_3\} \{v_3, v_1\}$



C_3



C_4



C_5



C_6

چرخ (Wheel)

اگر یک رأس دیگر به دور C_n اضافه کنیم و این رأس را به وسیله یال‌هایی به تمام n رأس دیگر متصل کنیم، چرخ W_n به دست می‌آید.



W_3



W_4



W_5



W_6

مکعب‌های n -بعدی

مکعب n - بعدی Q_n : گرافی است که رأس‌های آن نمایش دهنده رشته بیتی به طول n می‌باشد. در این گراف دو رأس مجاور یکدیگر می‌باشند اگر و تنها اگر رشته‌های بیتی مربوط به آن‌ها دقیقاً در یک مکان بیتی با هم اختلاف داشته باشند. هر مکعب n بعدی، 2^n رأس و $n2^{n-1}$ یال دارد.

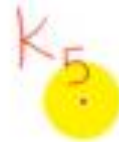
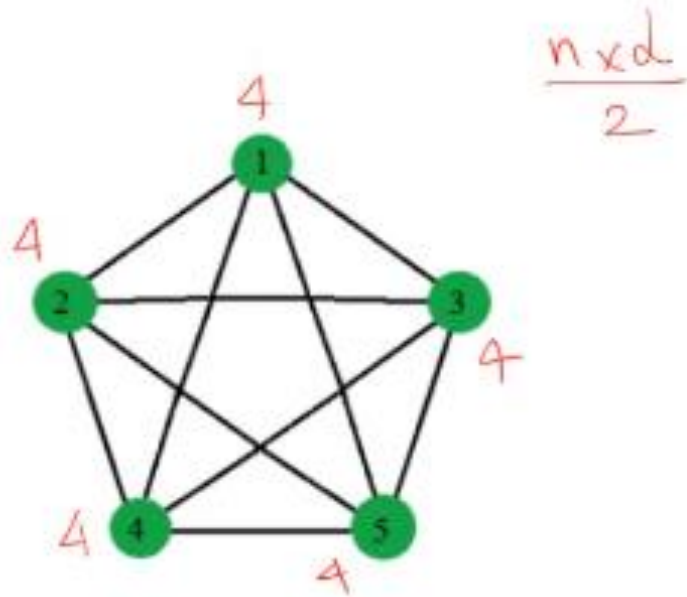
گراف منتظم

گراف منتظم: گراف ساده‌ای که درجه همه رأس‌های آن یکسان باشد.

گراف d - منتظم: گرافی که درجه همه رأس‌های آن برابر d باشد.

تعداد یال‌های گراف d منتظم برابر $\frac{n \times d}{2}$ است.

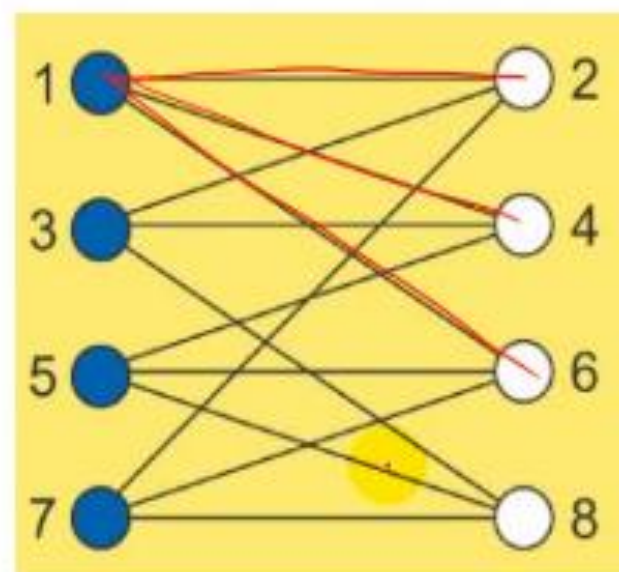
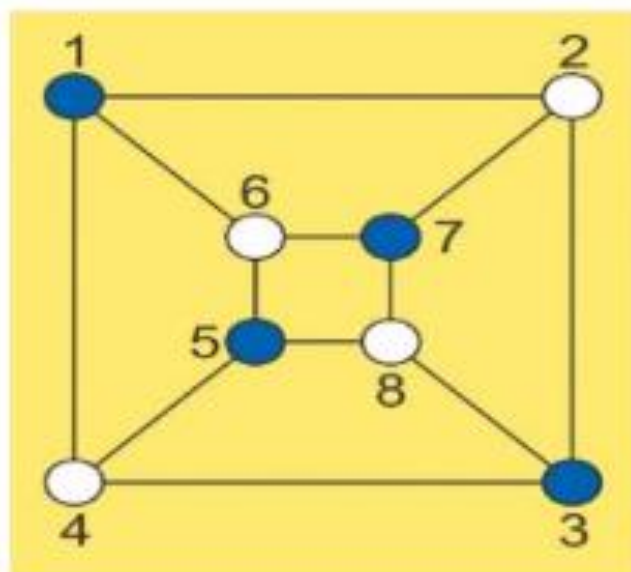
هر دراف کامل K_n ، یک دراف $(n - 1)$ منتظم است.



گراف دو قسمتی (Bipartite)

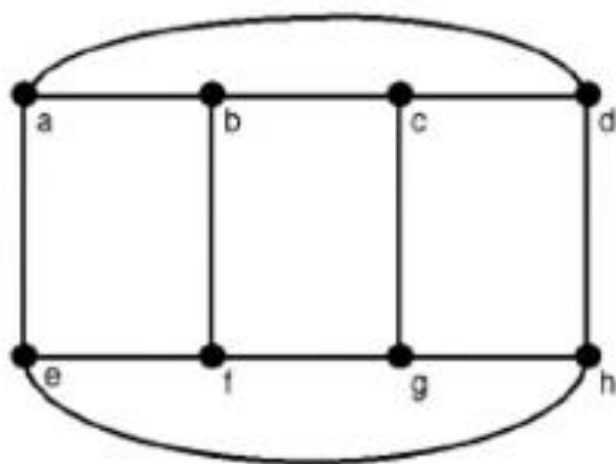
اگر در یک گراف ساده، بتوان مجموعه رأس‌ها را به دو زیر مجموعه جدا از هم تقسیم کرد به طوری که هر یال در گراف، یک از رأس از مجموعه اول را به یک رأس از مجموعه رئوس دوم وصل کند.

$$\{1, 3, 5, 7\} \{2, 4, 6, 8\}$$



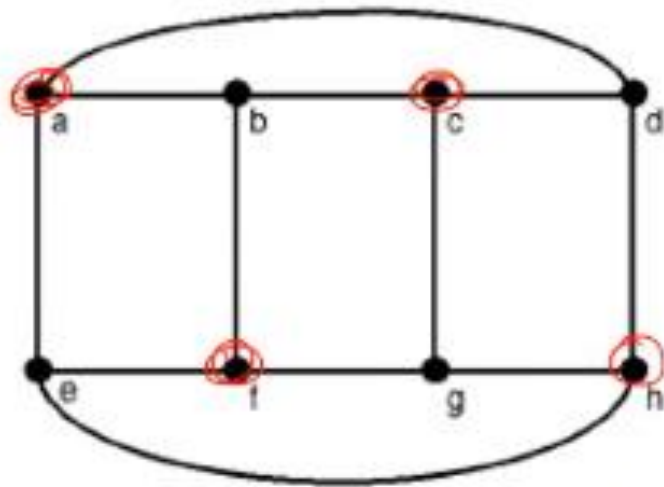
مثال

• آیا گراف زیر دو قسمتی است؟



مثال

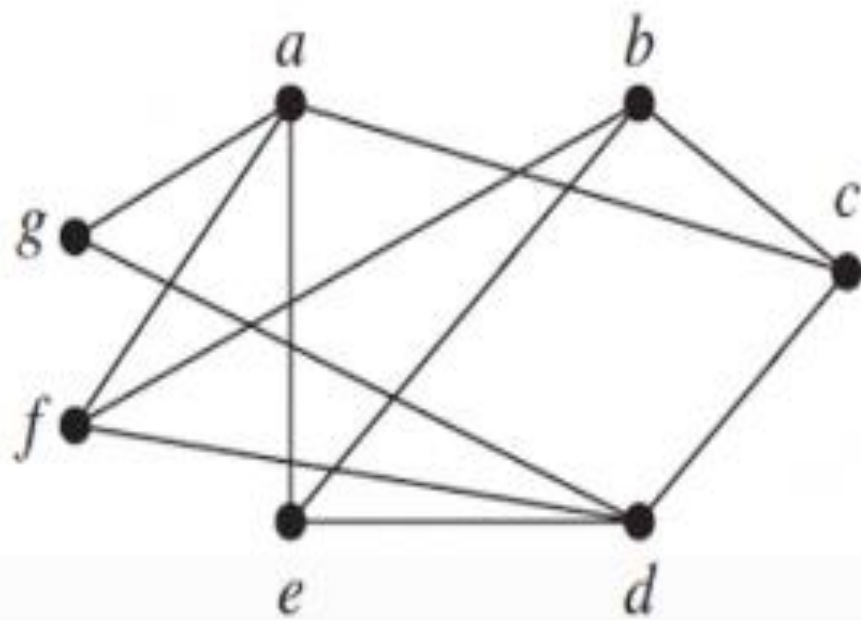
• آیا گراف زیر دو قسمتی است؟



$\{a, f, c, h\}$
 $\{b, d, e, g\}$

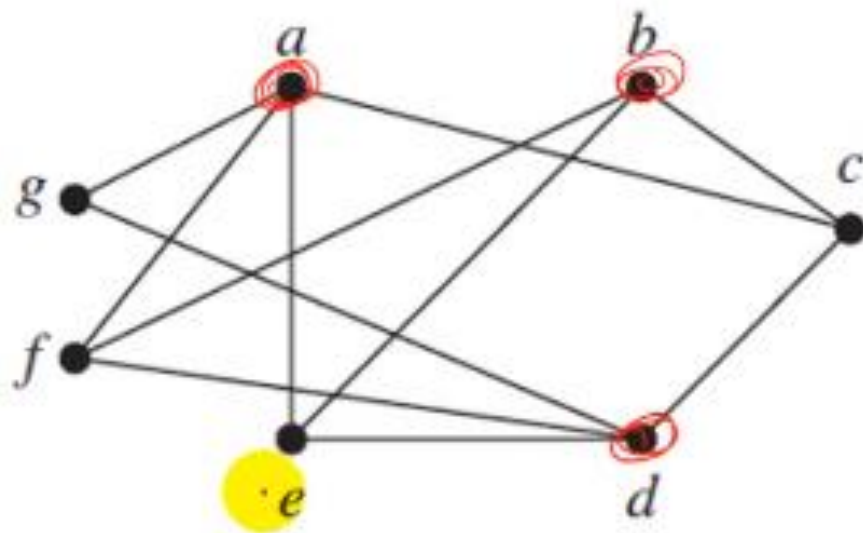
مثال

آیا گراف زیر دو قسمتی است؟



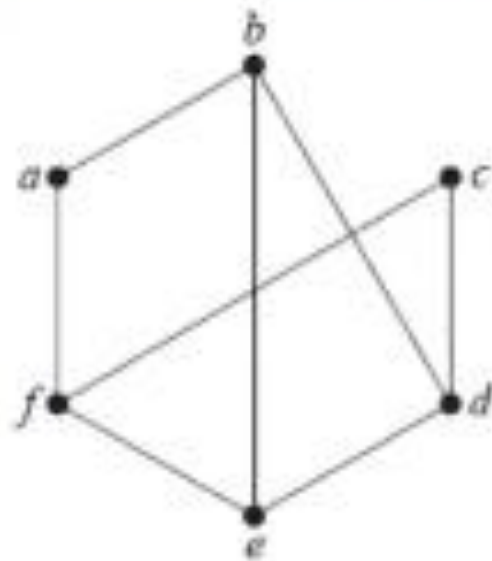
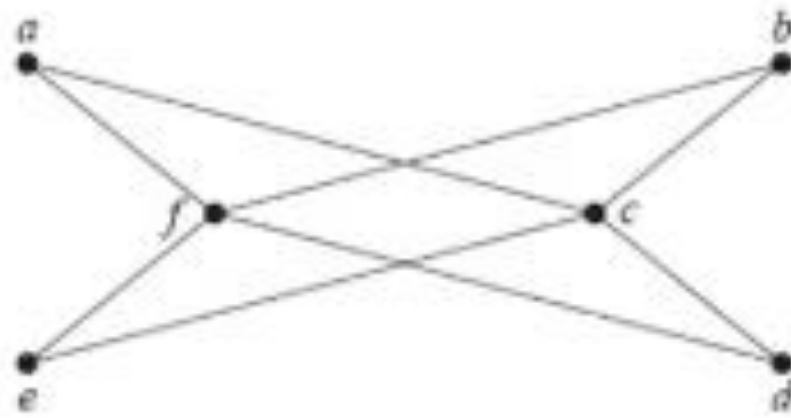
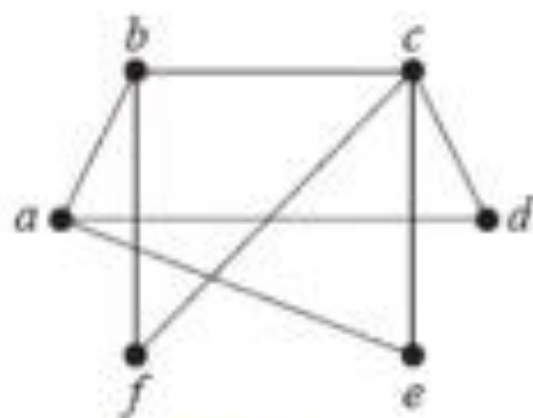
مثال

آیا گراف زیر دو قسمتی است؟

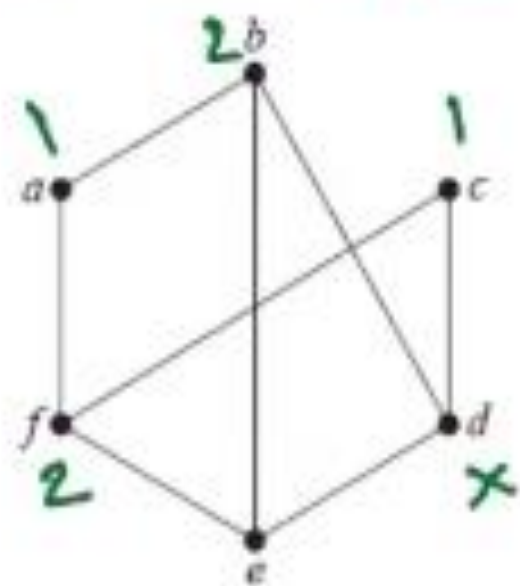
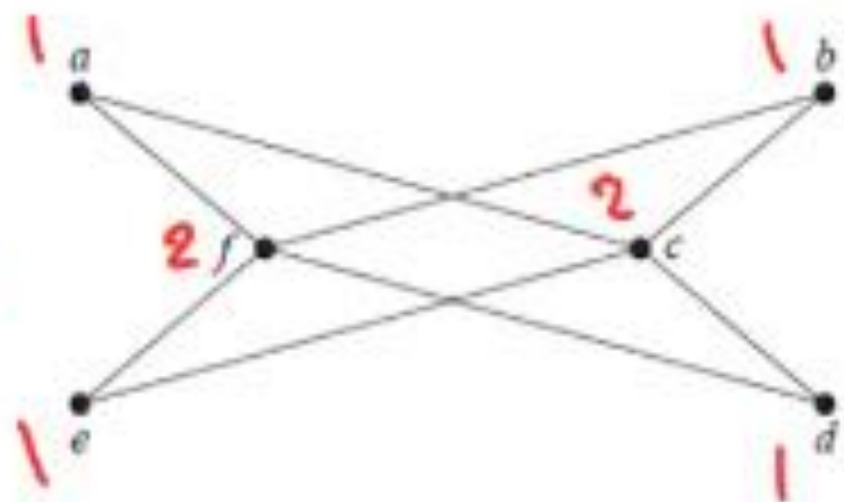
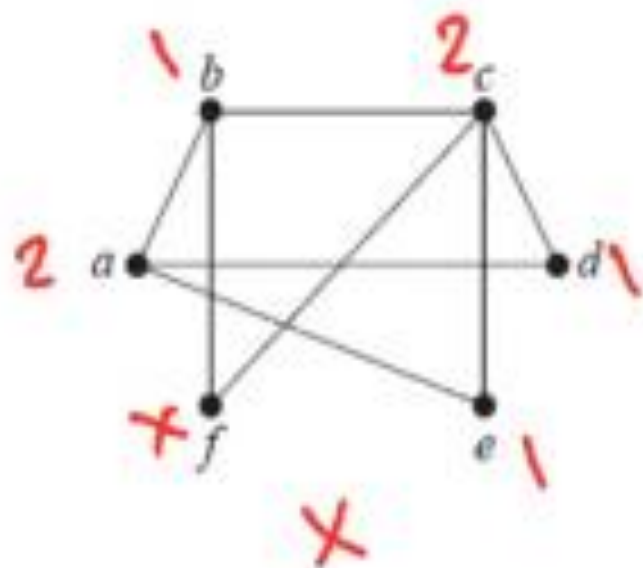


$\{a, b, d\}$
 $\{c, e, f, g\}$

مثال (۲): کدام گراف دو بخشی است؟

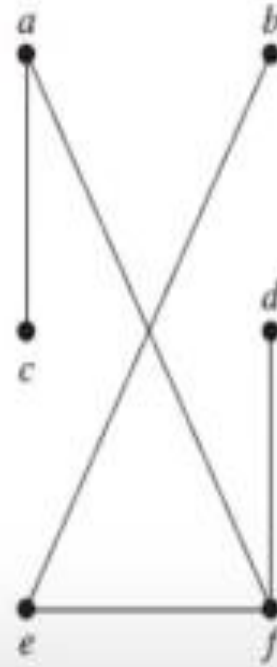
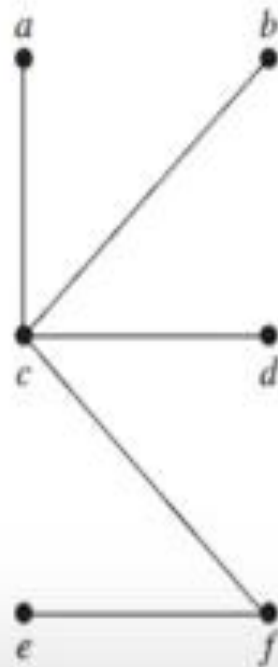


مثال (۲): کدام گراف دو بخشی است؟



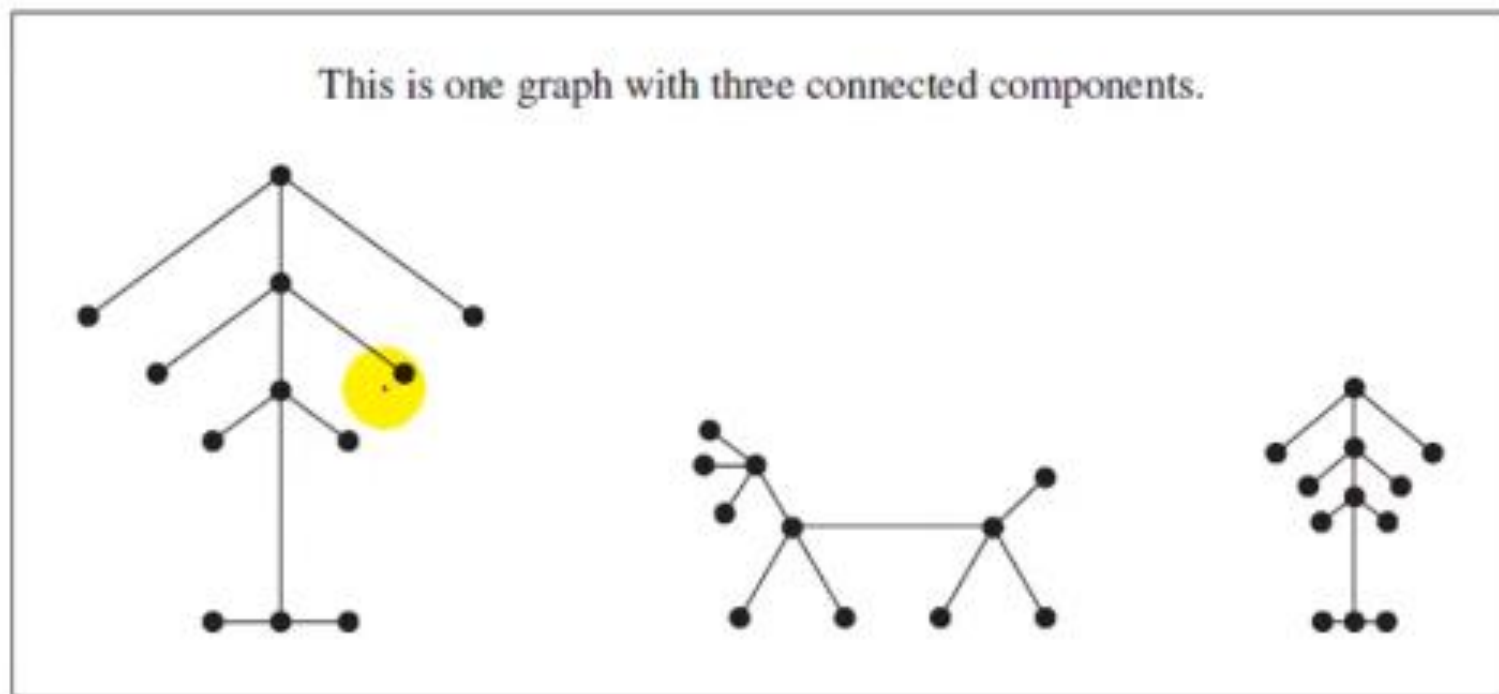
درخت

درخت: گراف غیر جهت دار همبند بدون دور.



جنگل (forest)

جنگل: گراف غیر همبند بدون دور ساده.



نکته

گراف بدون جهت و بدون طوقه که بین هر جفت از رأس‌های آن مسیری یکتا وجود داشته باشد، یک درخت است.



$$\frac{n!}{2! (n-2)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{2 (n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

درخت با n رأس دارای $\binom{n}{2}$ مسیر متمایز است.



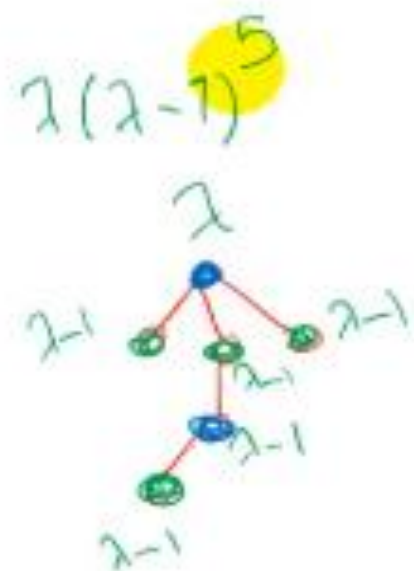
$$|V| = 5$$

$$|E| = 4$$

در هر درخت $T=(V,E)$ اگر $|V| \geq 2$ ، آنگاه حداقل دارای دو رأس با درجه یک است.

در هر درخت $T=(V,E)$ ، برابری $|V| = |E| + 1$ برقرار است.

نکته



هر درخت، یک گراف مسطح می باشد.

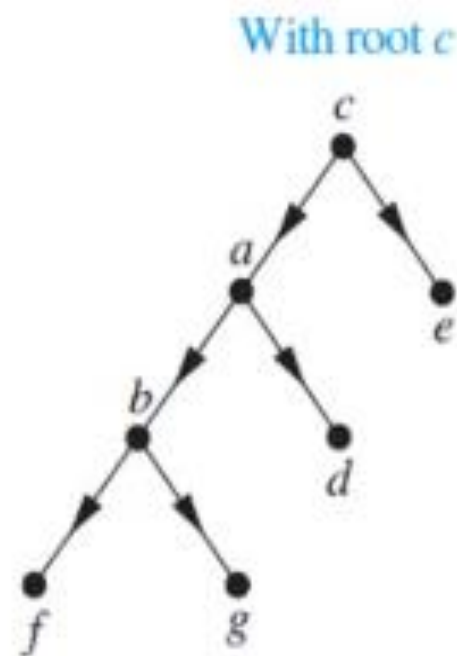
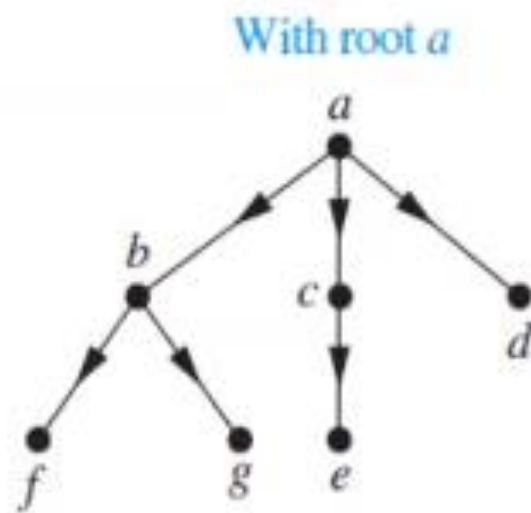
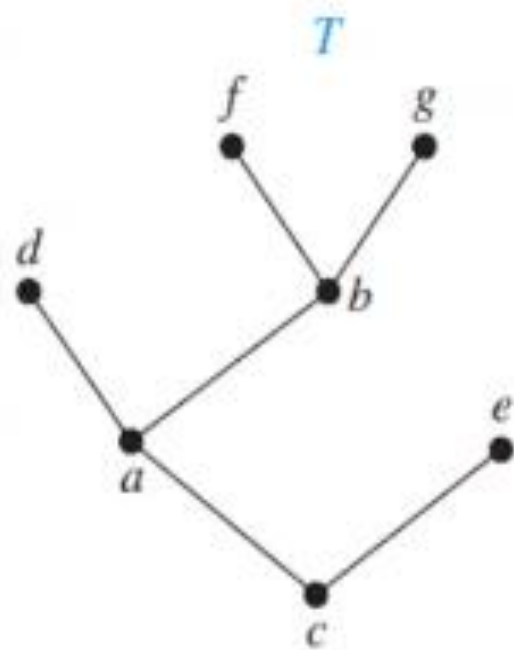
هر درختی یک گراف دوبخشی است.

عدد فامی درخت برابر ۲ است.

چند جمله ای فامی درخت به صورت $\lambda(\lambda - 1)^{n-1}$ می باشد.

درخت ریشه‌دار

درخت و درختان ریشه‌دار:

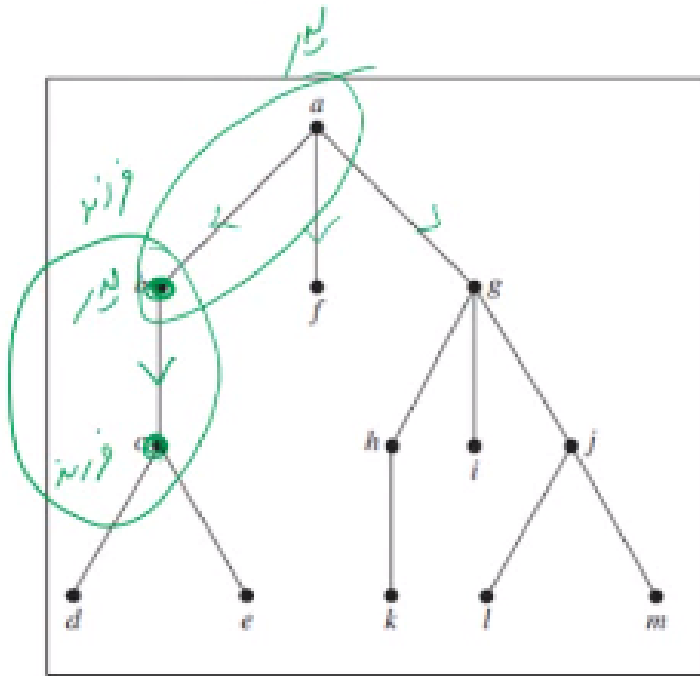


پدر (Parent) - فرزند (Child) - همزاد (Sibling)

پدر: اگر v یک رأس غیر از ریشه در یک درخت ریشه‌دار باشد، رأس یکتای u را پدر رأس v می‌گویند اگر و تنها اگر یک یال جهت‌دار از u به v وجود داشته باشد.

فرزند: اگر رأس u پدر رأس v باشد، رأس v را فرزند رأس u می‌نامند.

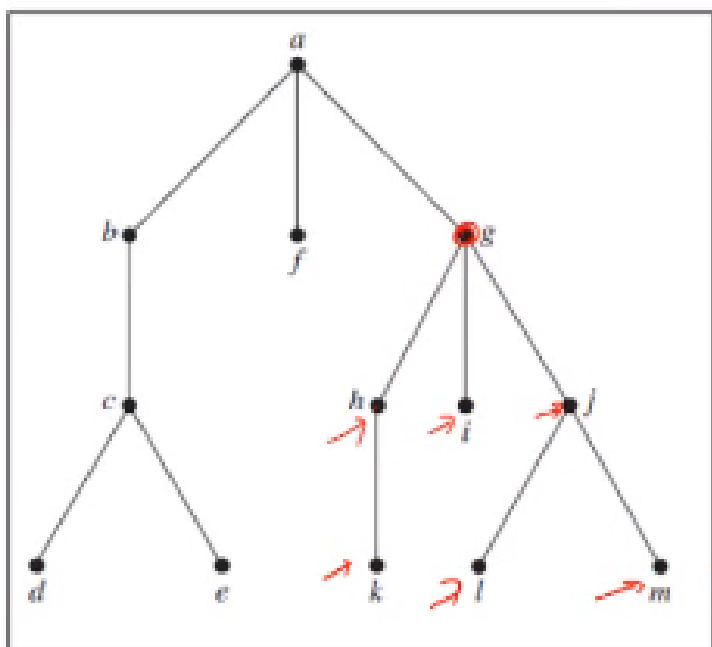
همزاد: رأس‌هایی که پدر آن‌ها یکسان است.



جد (Ancestor) - نوه (Descendant)

جد: اجداد یک رأس (غیر از ریشه)، رأس‌هایی هستند که در مسیری از ریشه به این رأس قرار دارند.

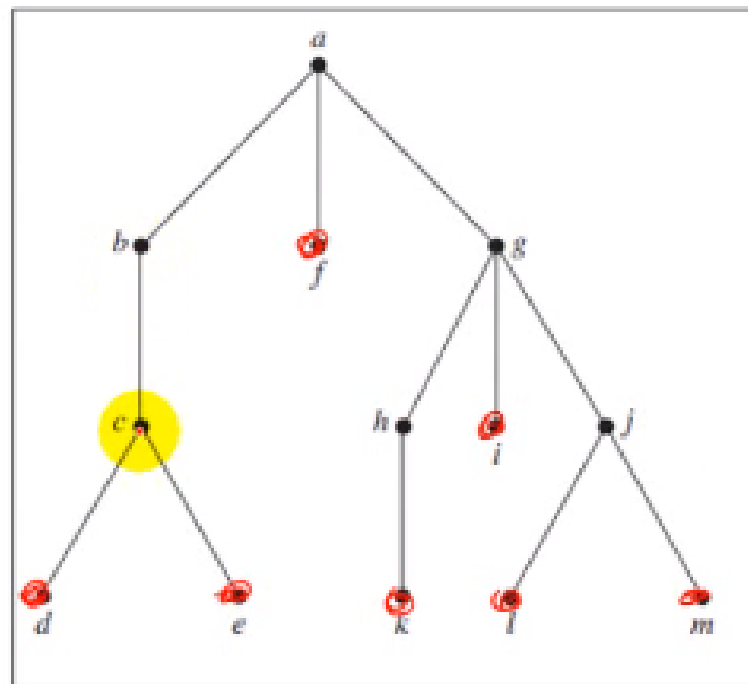
نوه: نوادگان رأس v ، رأس‌هایی هستند که v جد آنها باشد.



برگ (leaf) - رأس داخلی (internal vertex)

برگ: رأسی که هیچ فرزندی نداشته باشد (درجه آن صفر باشد).

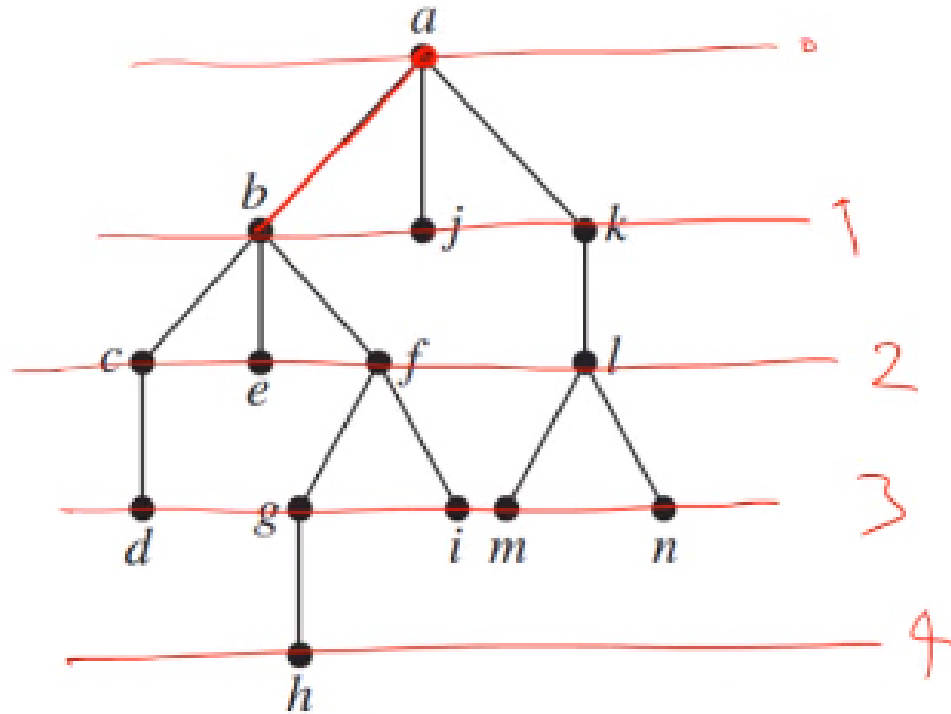
رأس داخلی: هر رأس که فرزند داشته باشد (درجه آن مخالف صفر باشد).



سطح و ارتفاع

سطح یک رأس: طول مسیری یکتا از ریشه به این رأس است.

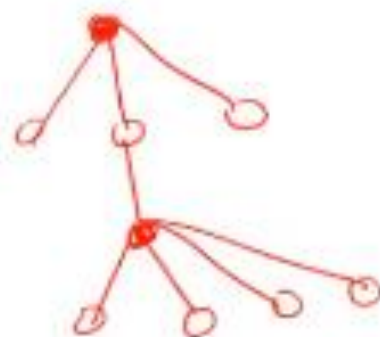
ارتفاع درخت: بیشترین شماره سطح موجود در درخت.



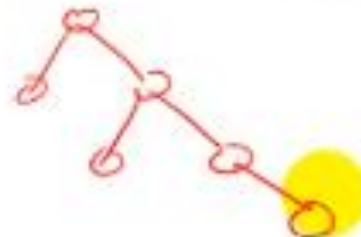
درخت m تایی

درخت ریشه‌دار T را m تایی می‌گویند اگر هر رأس آن حداکثر m فرزند داشته باشد.

درخت دودویی: درخت ریشه‌دار از درجه ۲.



$$m=4$$



تعداد درخت‌های دودویی

تعداد درخت‌های دودویی متفاوت که n رأس دارند و رأس‌های آن برچسب ندارند: $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$

(n امین عدد کاتالان)

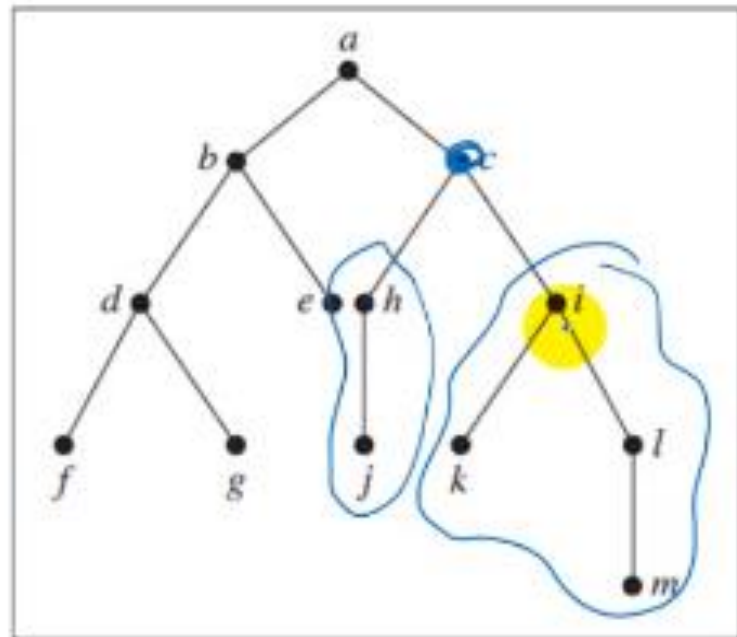
تعداد درخت‌های دودویی متفاوت که n رأس دارند و رأس‌های آن برچسب دارند برابر است با:

$$\frac{n!}{n+1} \binom{2n}{n}$$

زیر درخت

زیر درخت چپ رأس v : درختی که ریشه آن فرزند چپ رأس v است.

زیر درخت راست رأس v : درختی که ریشه آن فرزند راست رأس v است.



مثال: زیر درخت چپ و راست رأس c :



درخت پر

درخت ریشه‌دار T از درجه m را پر می‌نامیم، اگر همه رأس‌های داخلی آن دقیقا m فرزند داشته باشد.

در یک درخت پر m تایی:

تعداد رئوس داخلی: $\frac{(n-1)}{m}$

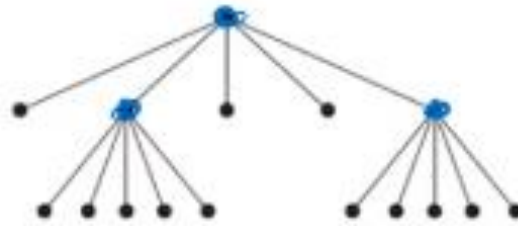
تعداد برگ‌ها: $\frac{(m-1)n+1}{m}$



$$m=2$$

$$n=7$$

$$\rightarrow \frac{7-1}{2} = 3, \quad \frac{7+1}{2} = 4$$



$$m=5$$

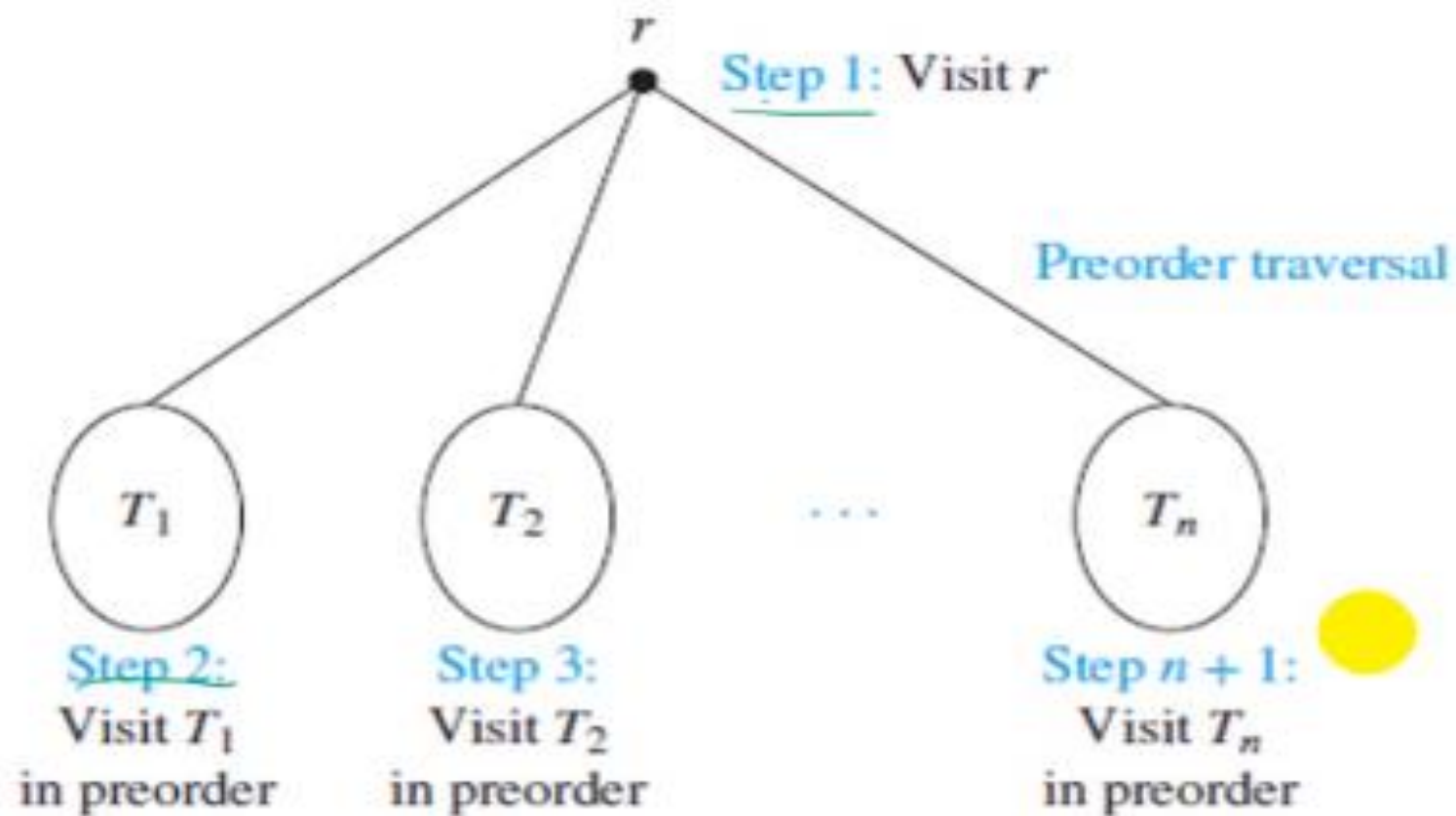
$$n=16$$

$$\rightarrow \frac{15}{5} = 3, \quad \frac{4 \times 16 + 1}{5} = 13$$

Preorder: راست چپ ریشه
Inorder: ریشه چپ راست
Postorder: ریشه راست چپ

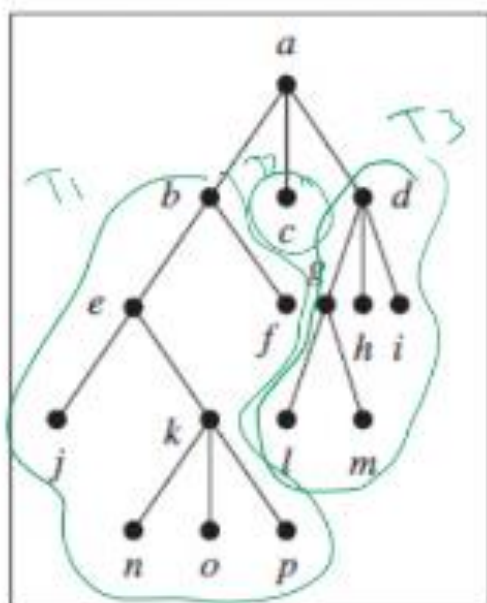
پیمایش درخت

پیمایش پیش ترتیب (Preorder)

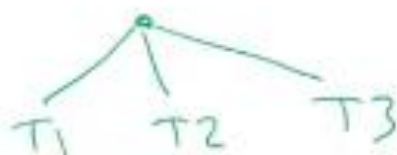


مثال

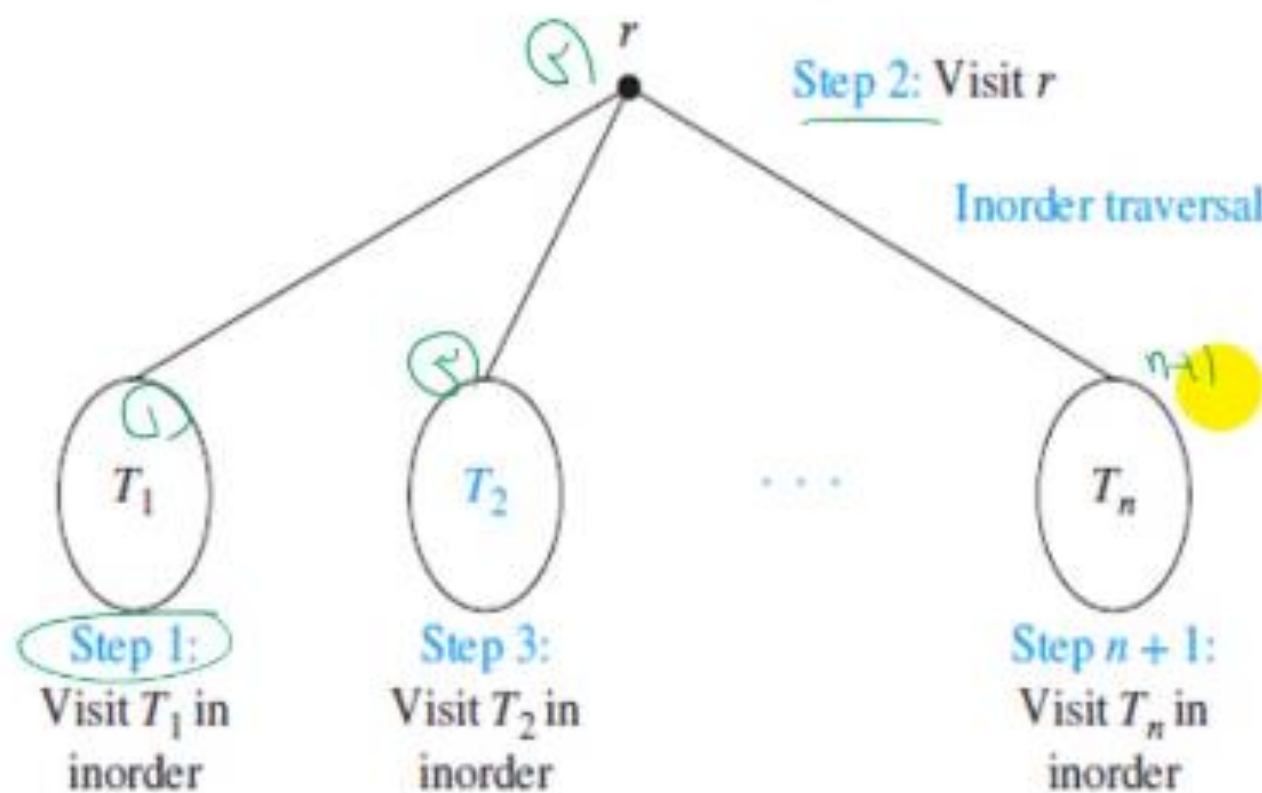
پیمایش preorder درخت زیر را تعیین کنید.



a b e j k n o p f c g l h i
 T_1 T_2 T_3

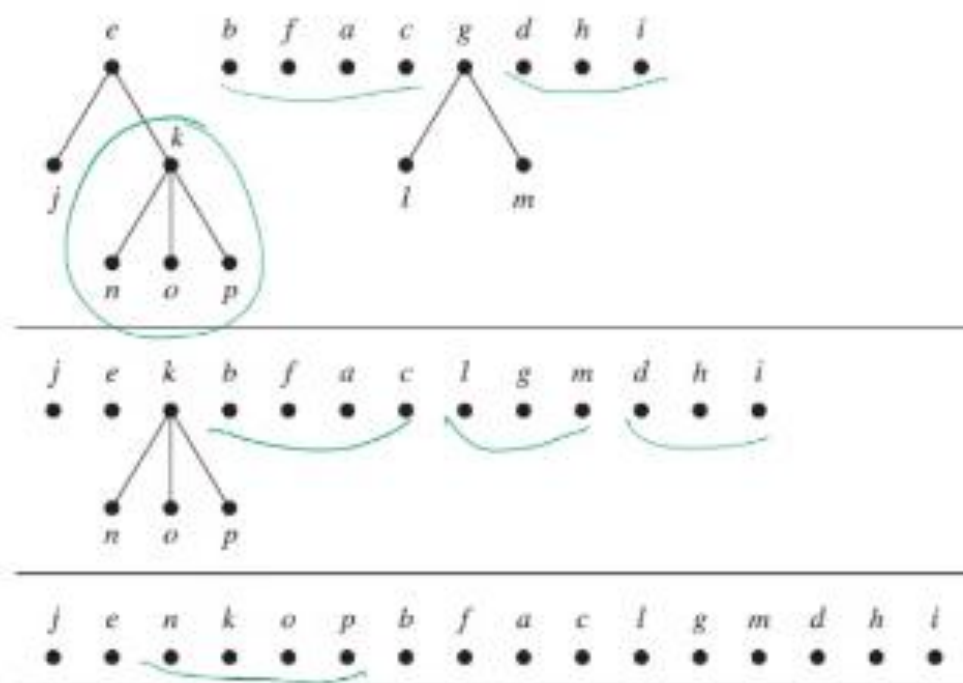
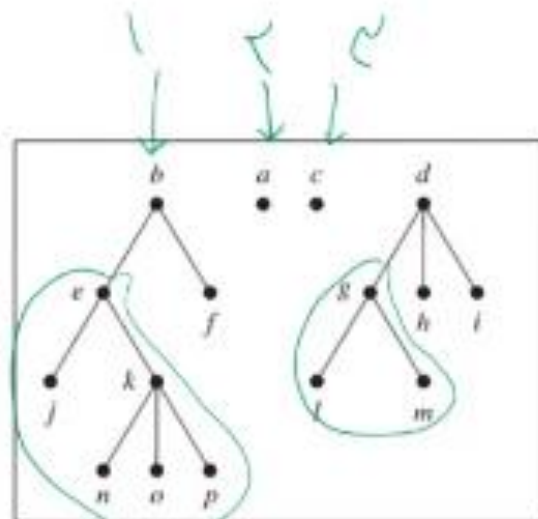
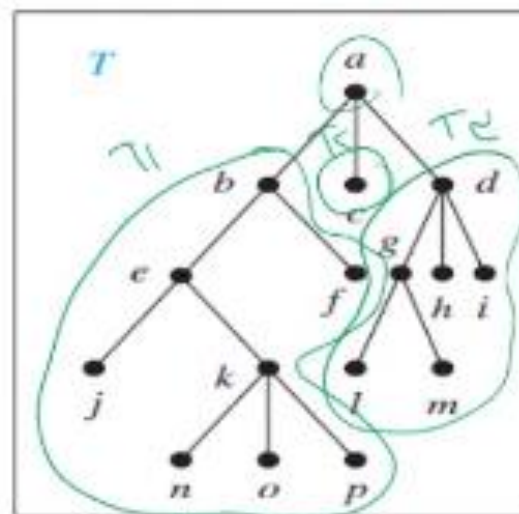


پیمایش میان ترتیب (Inorder)

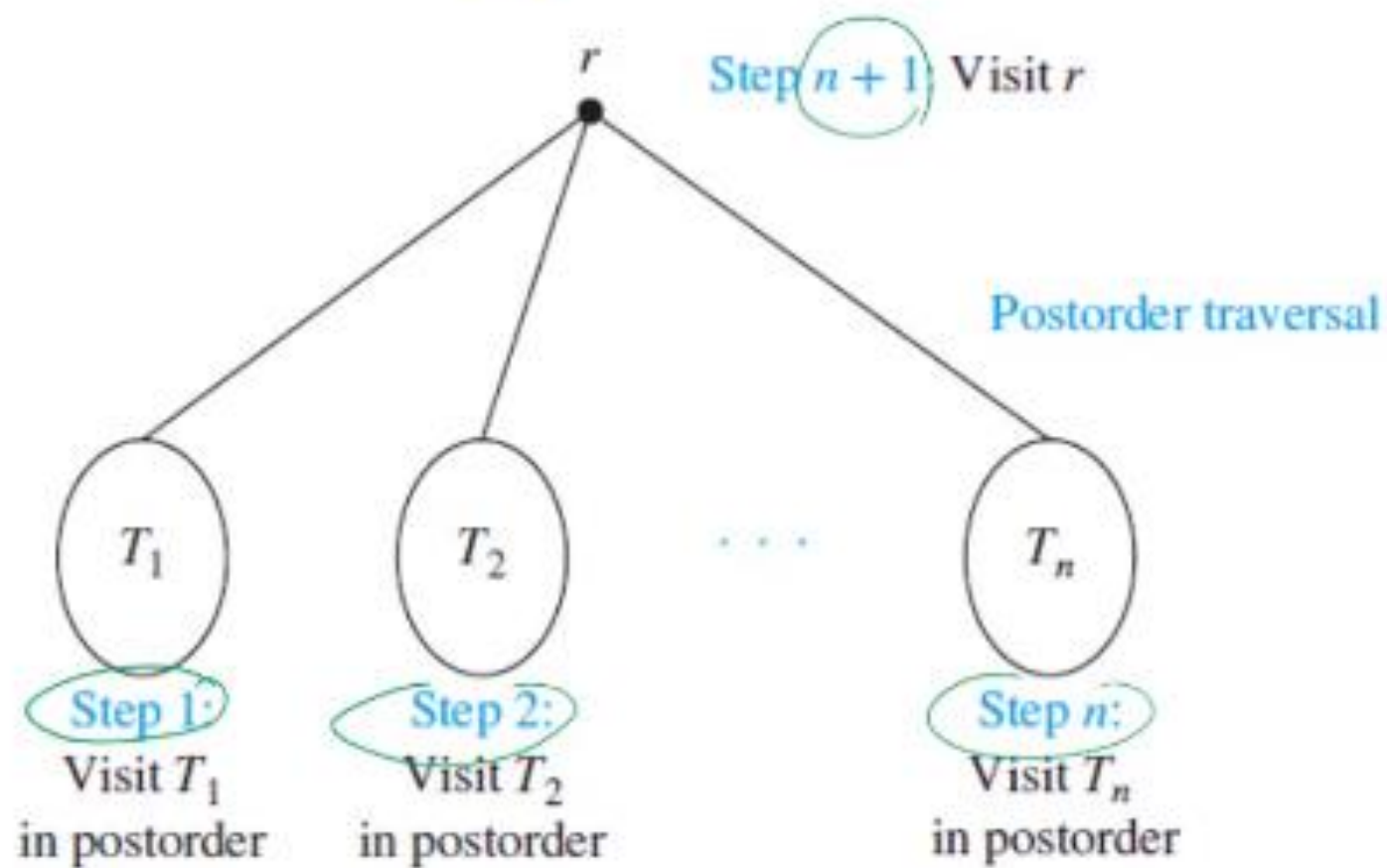


مثال

پیمایش inorder درخت زیر را تعیین کنید.

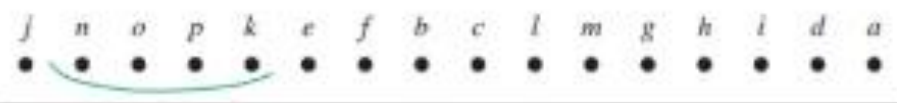
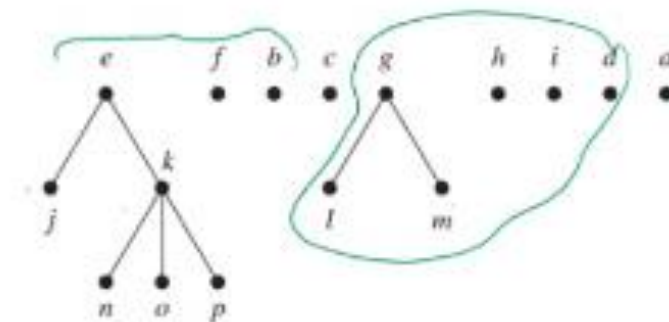
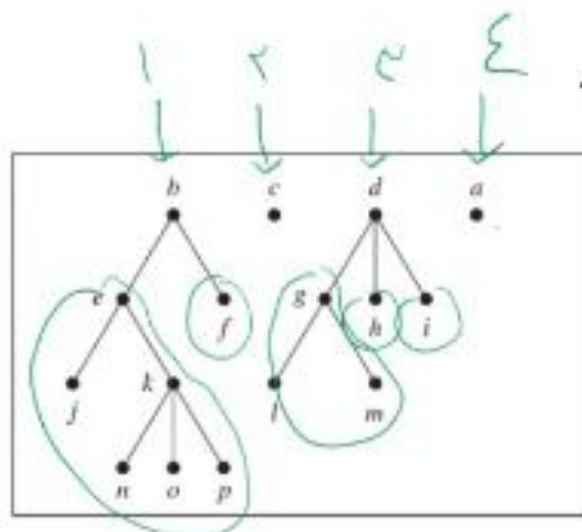
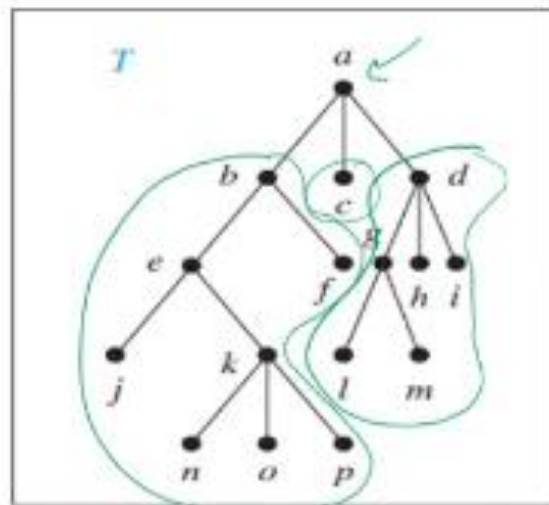


پیمایش پس ترتیب (Postorder)



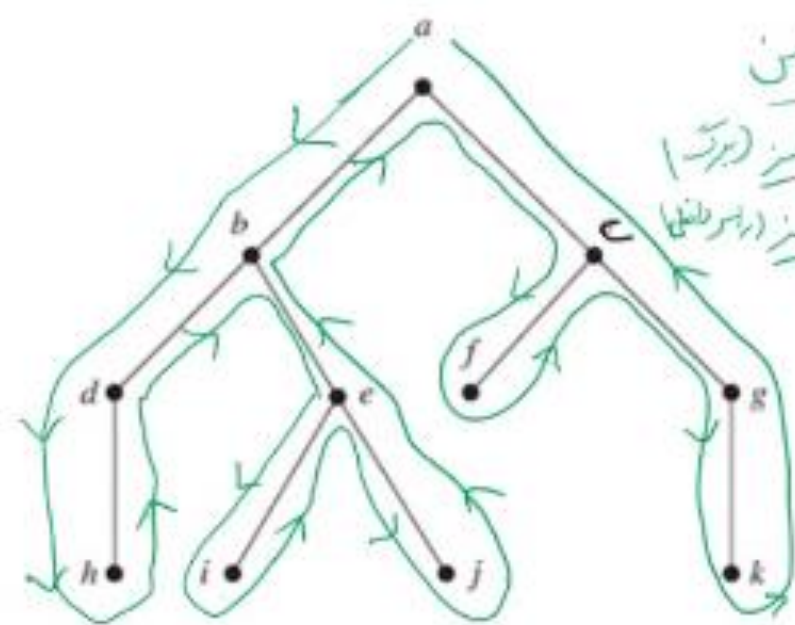
مثال

پیمایش postorder درخت زیر را تعیین کنید.



مثال

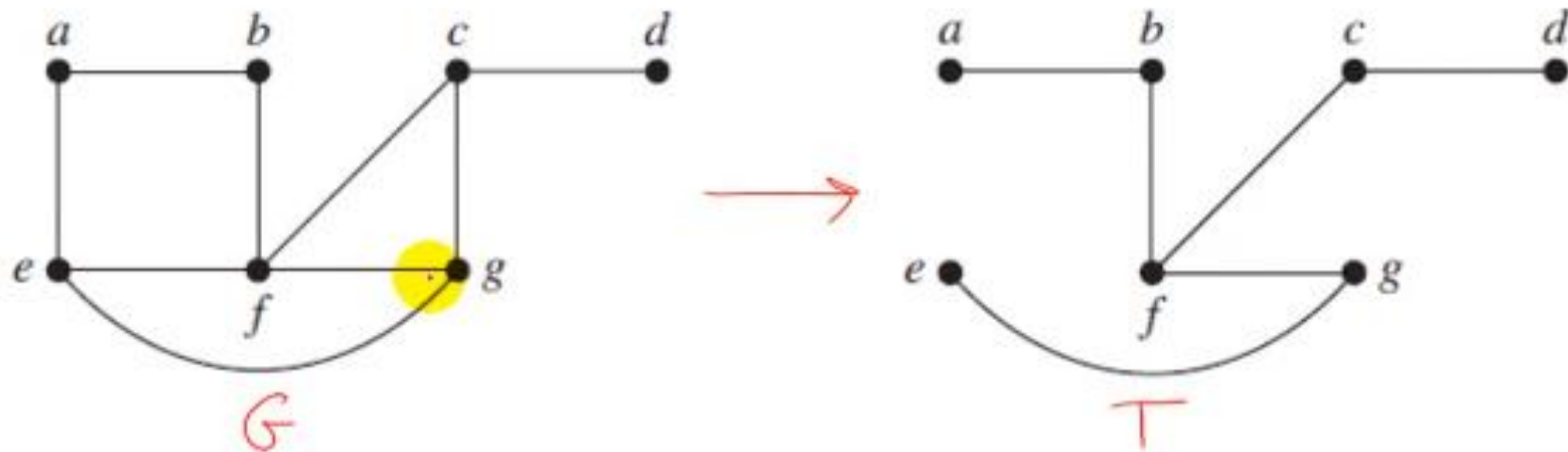
درخت زیر را با سه روش پیمایش کنید.



preorder : $a \ b \ d \ h \ e \ i \ c \ f \ g \ k$ ← اولین
 inorder : $h \ d \ b \ i \ e \ j \ a \ f \ c \ k \ g$ ← اولین (برگه)
 postorder : $h \ d \ i \ j \ e \ b \ f \ k \ g \ c \ a$ ← آخرین (پایین)

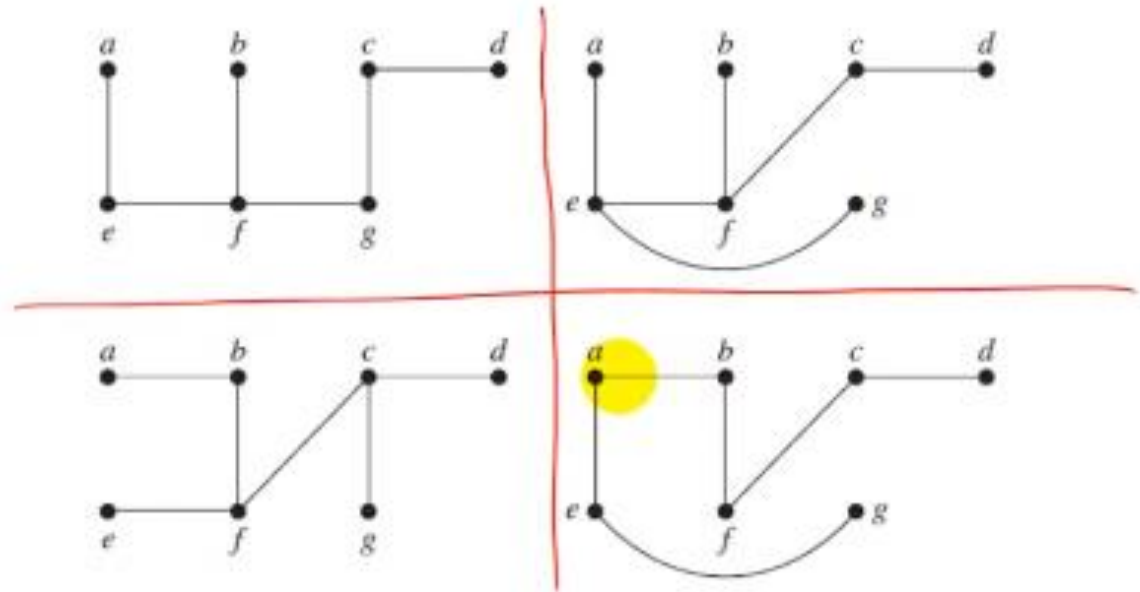
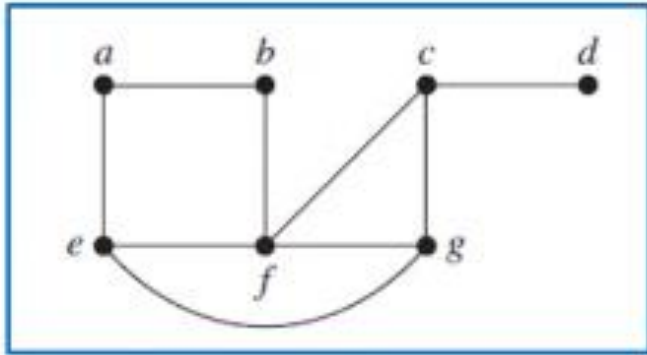
درخت پوشا

گراف $G=(V,E)$ را در نظر می‌گیریم. زیر گراف T را درخت پوشا می‌نامیم، اگر T یک درخت پوشا باشد و شامل همه رأس‌های موجود در V باشد.



مثال

چند درخت پوشا برای گراف G را مشخص کنید.

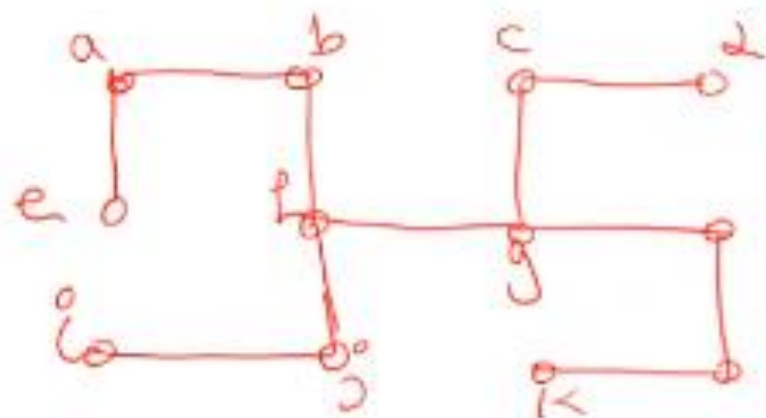


درخت پوشای حداقل (Minimum Spanning Tree)

MST

درخت پوشای کمینه یک گراف وزن دار، درخت پوشایی است که حاصل جمع وزن دار یال‌های آن کمترین مقدار ممکن باشد.

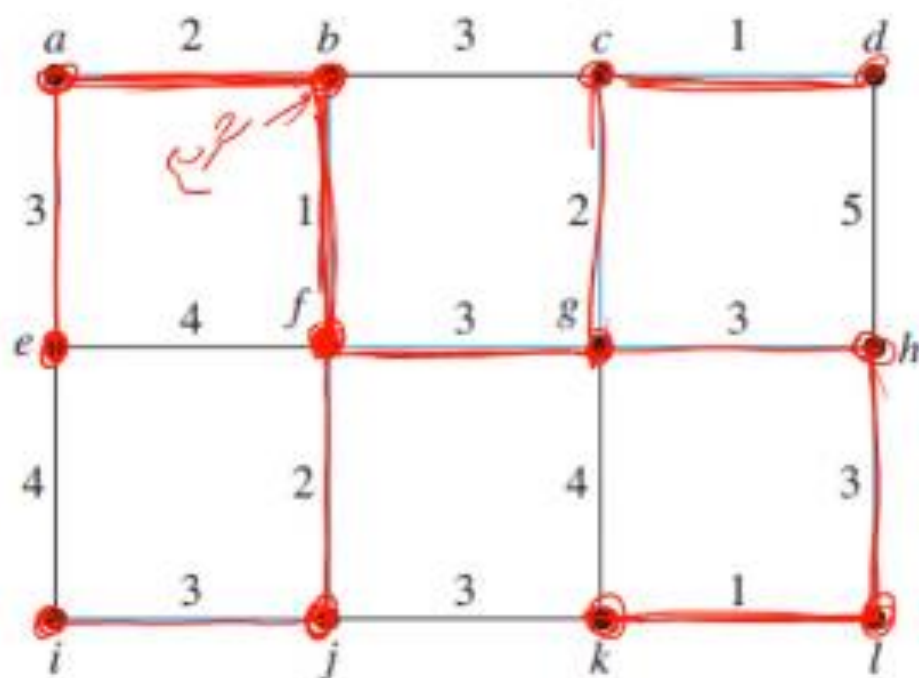
به کمک الگوریتم‌های پریم و کراسکال می‌توان درخت پوشای کمینه گراف را مشخص کرد.



پریم

درخت پوشای حداقل تولید شده با الگوریتم پریم.

MST



Choice	Edge	Weight
1	{b, f}	1
2	{a, b}	2
3	{f, j}	2
4	{a, e}	3
5	{i, j}	3
6	{f, g}	3
7	{c, g}	2
8	{c, d}	1
9	{g, h}	3
10	{h, l}	3
11	{k, l}	1
Total:		24

نکته

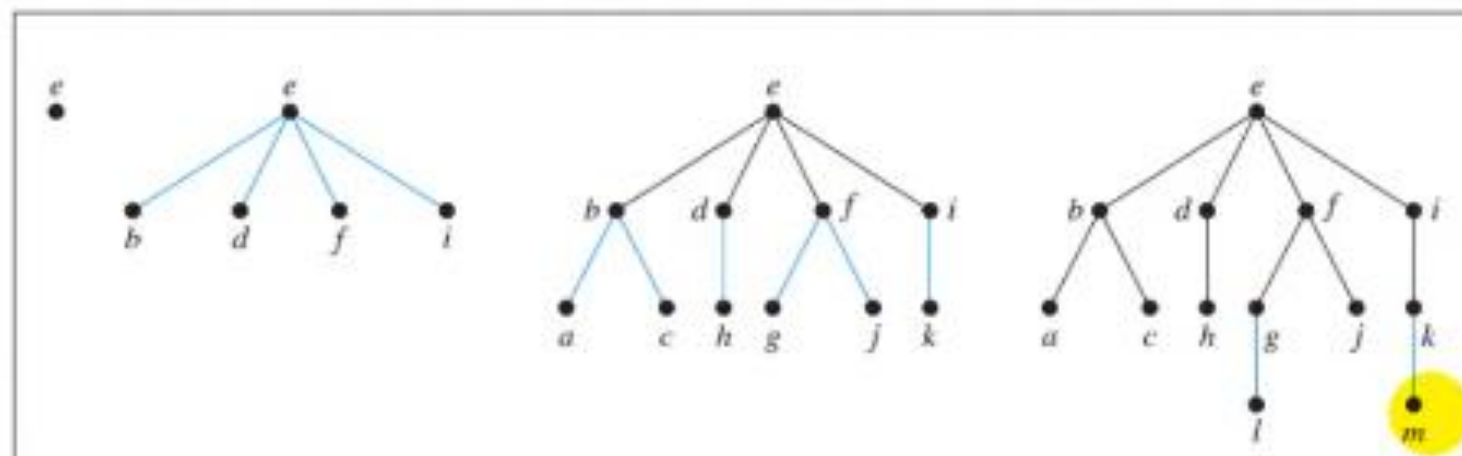
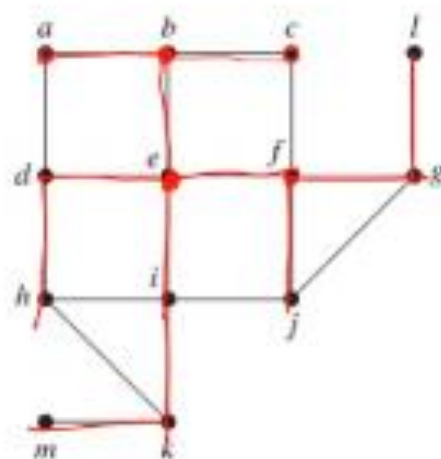
- اگر درخت پوشای کمینه یک گراف را به وسیله دو الگوریتم پریم و کراسکال تعیین کنیم، حاصل جمع وزن یال‌های آن‌ها با هم برابر است ولی الزاماً دو درخت یکسان نمی‌باشند.
- اگر وزن یال‌های یک گراف، دو به دو با هم متفاوت باشد، درخت پوشای کمینه ایجاد شده توسط پریم و کراسکال با هم یکسان است.

جست و جوی اول سطح - جست و جوی اول عمق

جست و جوی اول سطح (Breadth First Search)

۱۱۰

از یک رأس گراف به عنوان ریشه شروع می‌کنیم پس از آن تمام رأس‌های مجاور ریشه را ملاقات می‌کنیم حال این کار را با رأس ملاقات شده بعدی انجام می‌دهیم. این کار را ادامه می‌دهیم تا این همه رأس‌ها ملاقات شوند.



جست و جوی اول عمق (Depth First Search)

از یک رأس گراف به عنوان ریشه شروع می‌کنیم و آن را ملاقات می‌کنیم. حال یکی از رأس‌های مجاور ریشه که پیش از این ملاقات نکرده‌ایم را انتخاب و ملاقات می‌کنیم. حال این کار را با رأس جدید انجام می‌دهیم. اگر به رأسی رسیدیم که همه رئوس مجاور با آن ملاقات شده بودند، یک رأس به سمت عقب حرکت می‌کنیم.